BIBLIOTECA DI SCIENZE FISICHE
MATEMATICHE E NATURALI

C. CIAMBERLINI E B. BETTINI

ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA

AD USO DEI LICEI CLASSICI

SECONDO GLI ULTIMI PROGRAMMI

G. B. PARAVIA & C.

C. CIAMBERLINI E B. BETTINI

ELEMENTI
DI
TRIGONOMETRIA
AD USO DEI LICEI CLASSICI

SECONDO GLI ULTIMI PROGRAMMI

G. B. PARAVIA & C.
TORINO-MILANO-FIRENZE-ROMA-NAPOLI-PALERMO

TERZA RISTAMPA

PROPRIETÀ LETTERARIA

Torino — G. B. Paravia & C.

860 (*e*) 1931. 09306.

PARTE I

Funzioni trigonometriche di angoli acuti.

Risoluzione dei triangoli rettangoli.

Funzioni trigonometriche di angoli acuti.

§ 1. — Angoli ed archi misurati in radianti.

1. — Sappiamo che due archi circolari sono *simili*, se i due angoli al centro corrispondenti sono eguali.

Le lunghezze di due archi simili sono proporzionali ai loro raggi; e inversamente.

Invero, se l, l' sono le lunghezze di due archi simili; r, r' i loro raggi; c, c' le lunghezze delle circonferenze cui essi appartengono; α l'angolo al centro ad essi corrispondente, si ha:

$$l : c = \alpha : 4\widehat{R}, \qquad (\widehat{R} = \text{angolo retto})$$

$$l' : c' = \alpha : 4\widehat{R};$$

quindi:

$$l : l' = c : c'.$$

Ma

$$c : c' = r : r';$$

perciò anche:

$$l : l' = r : r'.$$

Leggendo in ordine inverso le proporzioni precedenti, e chiamando α, α' gli angoli al centro corrispondenti agli archi l, l', si prova che $\alpha = \alpha'$; e quindi la simiglianza degli archi.

2. — Per la misurazione degli angoli e degli archi corrispondenti sono adottati due sistemi diversi:

1°. Il *sistema sessagesimale.* — In questo sistema l'unità di misura degli angoli è il *grado angolare* $\left(\frac{1}{90}\right.$ di angolo

retto); e, degli archi, il *grado circolare* $\left(\frac{1}{90}\right.$ di un quadrante$\left.\right)$. — Il grado si divide in 60 *primi*; il primo in 60 *secondi*.

Il risultato della misurazione in gradi, primi e secondi dicesi *ampiezza* (dell'angolo o dell'arco).

Così, per es., diremo: l'ampiezza dell'angolo α è $15°27'38''$; l'ampiezza dell'arco β è $50°34'$; ec.

Archi simili hanno la stessa ampiezza, e precisamente quella dell'angolo al centro corrispondente.

2°. Il *sistema circolare*. — In questo sistema si prende per unità di misura degli archi di una circonferenza l'*arco radiante*, che è l'arco la cui lunghezza è eguale al *raggio*; e come unità di misura degli angoli l'*angolo radiante*, che è l'angolo al centro corrispondente all'arco radiante.

Gli archi radianti di circonferenze diseguali sono simili (perchè eguali ai rispettivi raggi, e perciò proporzionali a questi); quindi l'angolo radiante (angolo al centro corrispondente) è unico e determinato.

Due archi simili e l'angolo al centro corrispondente, come hanno la stessa ampiezza, così hanno lo stesso valore in radianti.

3. — L'ampiezza di una circonferenza è $360°$. — Il valore della circonferenza in *radianti* (rapporto della sua lunghezza all'arco radiante, che è eguale al raggio r), è

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi .$$

Se quindi si indica con α l'ampiezza di un arco (o di un angolo) e con m il suo valore in radianti, si ha:

$$\alpha : 360 = m : 2\pi ,$$

da cui risultano le formule:

$$m = \frac{2\pi \,.\, \alpha}{360} = \frac{\pi\alpha}{180} ; \qquad \alpha = \frac{360 \,.\, m}{2\pi} = \frac{180 \,.\, m}{\pi} ,$$

che servono per passare dall'ampiezza al valore in radianti, e viceversa.

Così, per es., per un arco di $15°$ ($\alpha = 15$) si ha:

$$m = \frac{\pi \cdot 15}{180} = \frac{\pi}{12};$$

se $m = \frac{\pi}{15}$, sarà:

$$\alpha = \frac{180}{15} = 12.$$

In particolare, i valori in radianti degli angoli

$$180°;\quad 90°;\quad 45°;\quad 60°;\quad 30°;\quad 18°;\quad 270°;\quad 405°$$

sono:

$$\pi;\quad \frac{\pi}{2};\quad \frac{\pi}{4};\quad \frac{\pi}{3};\quad \frac{\pi}{6};\quad \frac{\pi}{10};\quad \frac{3\pi}{2};\quad 2\pi + \frac{\pi}{4}.$$

L'ampiezza di un arco eguale ad un radiante ($m = 1$) è

$$\frac{180°}{\pi} = 57°17'44'', ...$$

e questo quindi è anche l'angolo radiante.

4. — AVVERTENZA. — In ciò che segue indicheremo generalmente gli angoli per mezzo delle loro ampiezze. — In teoria è molto usata l'indicazione degli angoli in radianti.

L'alunno farà bene ad esercitarsi a sostituire spesso, in luogo delle ampiezze, i valori in radianti.

$$m = \frac{2\pi\alpha}{360} = \frac{\pi\alpha}{180} \qquad \alpha = \frac{m\,360}{2\pi} = \frac{180m}{\pi} \qquad m = \frac{\pi}{15}$$

$$m = \frac{\pi\alpha}{180} \qquad \alpha = \frac{180\,m}{\pi} \qquad \alpha = \frac{\pi}{15} \times \frac{180}{\pi 15}$$

§ 2. — Seno, coseno e tangente d'un angolo acuto.

5. — Si consideri un *angolo acuto* qualsivoglia $\widehat{B}$ (fig. 1), e, preso un punto arbitrario C su uno qualunque dei suoi lati, si conduca il segmento CA normale all'altro lato. Si ottiene un triangolo rettangolo ABC. — I tre rapporti:

$$\frac{AC}{BC}; \quad \frac{AB}{BC}; \quad \frac{AC}{AB}$$

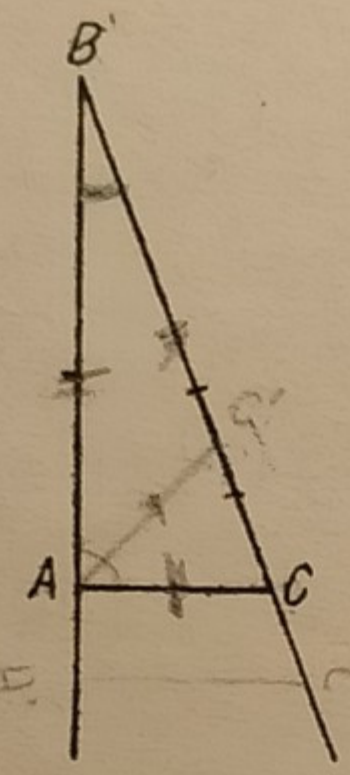


Fig. 1.

non cambiano se, invece del punto C, si prende un altro punto sull'uno o sull'altro lato dell'angolo dato $\widehat{B}$; perchè si otterrebbe un altro triangolo rettangolo simile al primo, e sappiamo che nei triangoli simili i lati omologhi sono proporzionali.

I tre rapporti suddetti *dipendono* soltanto dall'angolo dato $\widehat{B}$; sono *funzioni* di $\widehat{B}$, che hanno dei nomi speciali:

il rapporto $\frac{AC}{BC}$ si dice *seno* dell'angolo $\widehat{B}$;

" " $\frac{AB}{BC}$ " " *coseno* " $\widehat{B}$;

" " $\frac{AC}{AB}$ " " *tangente* " $\widehat{B}$.

Df. (1). — **Seno** *di un angolo acuto è il rapporto tra il cateto opposto e l'ipotenusa di uno qualunque dei triangoli rettangoli, che hanno un angolo acuto eguale a quello dato;*

coseno *di un angolo acuto è il rapporto tra il cateto adiacente e l'ipotenusa d'uno qualunque dei triangoli rettangoli,* ec.;

---

(1) Il segno abbreviativo Df si legga: *Definizione.*

tangente *di un angolo acuto è il rapporto tra il cateto opposto e il cateto adiacente d'uno qualunque dei triangoli rettangoli,* ec.

Per brevità si scrive:

$$sen\,\widehat{B}; \qquad cos\,\widehat{B}; \qquad tg\,\widehat{B}$$

rispettivamente in luogo di

seno di $\widehat{B}$; *coseno* di $\widehat{B}$; *tangente* di $\widehat{B}$.

Quindi la *Df* precedente è espressa brevemente dalle eguaglianze:

$$\text{sen}\,\widehat{B} = \frac{AC}{BC}; \qquad \cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC}; \qquad \text{tg}\,\widehat{B} = \frac{AC}{AB}.$$

Il seno, il coseno, la tangente di un angolo acuto si diranno complessivamente *funzioni trigonometriche* dell'angolo. — Le funzioni trigonometriche di un angolo acuto sono numeri assoluti.

6. — Diremo *seno, coseno, tangente di un arco* (minore di un quadrante) rispettivamente il seno, il coseno e la tangente dell'angolo al centro corrispondente all'arco.

Gli angoli e gli archi aventi lo stesso valore (in particolare gli archi simili) hanno le stesse funzioni trigonometriche.

Quindi, scrivendo per es.:

$$\text{sen } 45^\circ \qquad \left(\text{oppure} \quad \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right),$$

si può indifferentemente intendere che 45° $\left(\text{o } \frac{\pi}{4}\right)$ indichi un angolo, o un arco.

7. — Misuriamo i lati del triangolo ABC con una stessa misura, e indichiamo rispettivamente con

$$a, \qquad b, \qquad c$$

i valori dell'ipotenusa BC, e dei cateti AC, AB. Si avrà:

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{a}\,; \qquad \cos\widehat{B} = \frac{c}{a}\,; \qquad \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{b}{c}\,.$$

Es. — Se

$$b = 5\,; \qquad c = 12\,,$$

per il **T** (1) *metrico di Pitagora* si ha:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\,;$$

quindi, in questo caso:

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{5}{13}\,; \qquad \cos\widehat{B} = \frac{12}{13}\,; \qquad \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{5}{12}\,.$$

Oss. 1ª. — Se si assume per unità di misura l'ipotenusa del triangolo ABC, i rapporti

$$\frac{AC}{BC}\,; \qquad \frac{AB}{BC}$$

rappresentano i *valori* dei cateti AC, AB. Quindi:

In un triangolo rettangolo avente per ipotenusa l'unità di misura, il seno di un angolo acuto è il valore del cateto opposto; — e il coseno è il valore del cateto adiacente.

Oss. 2ª. — Il seno (o il coseno) di un angolo acuto è il rapporto tra un cateto e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo; e poichè ciascun cateto è minore dell'ipotenusa, consegue:

Il seno e il coseno di un angolo acuto sono sempre minori di 1.

Invece, la tangente di un angolo acuto, come rapporto tra due cateti, può essere maggiore, o minore, o anche eguale ad 1.

---

(1) Il segno T si legga: *teorema*.

§ 3. — Funzioni trigonometriche di 45°, 30°, 60° e 18°.

8. — Funzioni trigonometriche di 45°.

Supponiamo che l'angolo $\widehat{B}$ (fig. 2) sia di 45° (mezzo retto). Se da un punto qualunque C di uno dei suoi lati si conduce il segmento CA normale all'altro lato, si ottiene un triangolo rettangolo isoscele ABC. (Com'è noto, questo triangolo speciale è appunto uno dei due in cui un quadrato $ACDB$ vien diviso dalla diagonale BC).

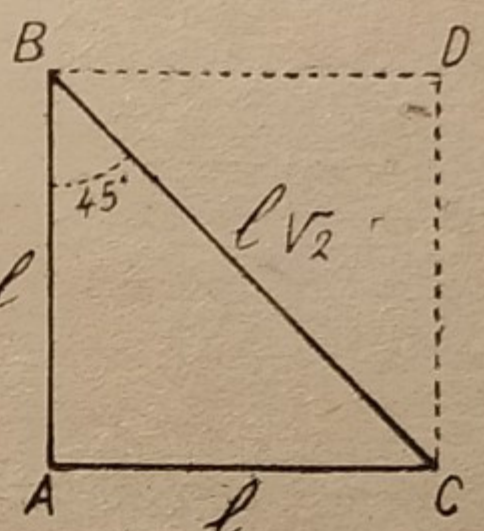


Fig. 2.

Se indichiamo con l il valore di ognuno dei cateti (cioè il valore del lato del quadrato), il valore dell'ipotenusa BC (diagonale del quadrato) è, com'è noto (1), espresso da $l\sqrt{2}$.

Applicando la Df delle funzioni trigonometriche all'angolo $\widehat{B} = 45°$, si ha:

$$\text{sen } 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071...$$

$$\cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071...$$

$$\text{tg } 45° = \frac{l}{l} = 1.$$

9. — Funzioni trigonometriche di 30°.

Supponiamo che l'angolo $\widehat{B}$ (fig. 3) sia di 30°. Se da un punto qualunque C di uno dei suoi lati si conduce il segmento normale CA all'altro lato, si ottiene un triangolo rettangolo ABC nel quale l'altro angolo acuto $\widehat{C}$ è di 60°. (Com'è noto,

---

(1) E come ogni alunno può del resto trovar subito.

il triangolo ABC è in questo caso uno dei due triangoli in cui il triangolo equilatero CBD è diviso dall'altezza BC).

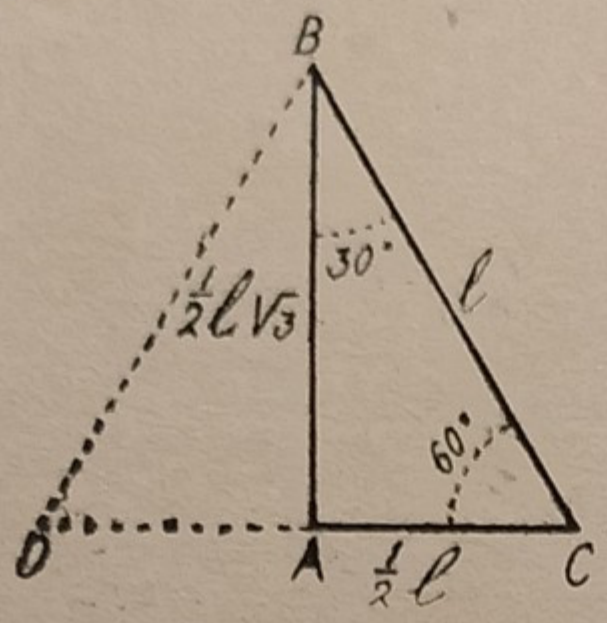


Fig. 3.

Se si indica con l il valore di BC, il valore del cateto AC è $\frac{1}{2}\ l$; e quello del cateto AB (altezza del triangolo equilatero) è $\frac{1}{2}\ l\sqrt{3}$.

Applicando le Df delle funzioni trigonometriche all'angolo $\widehat{B} = 30°$, abbiamo dunque:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{1}{2}\ l}{l} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ ;$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{1}{2}\ l\sqrt{3}}{l} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866...\ ;$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{1}{2}\ l}{\frac{1}{2}\ l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577...$$

10. — FUNZIONI TRIGONOMETRICHE DI 60°.

Applicando le Df delle funzioni trigonometriche all'angolo $\widehat{C} = 60°$ (fig. 3), si trova:

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{1}{2}\ l\sqrt{3}}{l} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866...\ ;$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{1}{2}\ l}{l} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ ;$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\frac{1}{2}\ l\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\ l} = \sqrt{3} = 1{,}732.....$$

11. — Funzioni trigonometriche di 18°.

Supponiamo che l'angolo $\widehat{B}$ (fig. 4) sia di 18°. Centro in B e raggio eguale all'unità di misura, si descriva una circonferenza che incontri in C uno dei lati dell'angolo $\widehat{B}$. Per il punto C si conduca il segmento normale CA all'altro lato dell'angolo $\widehat{B}$, e si prolunghi il segmento CA fino ad incontrare in D la circonferenza.

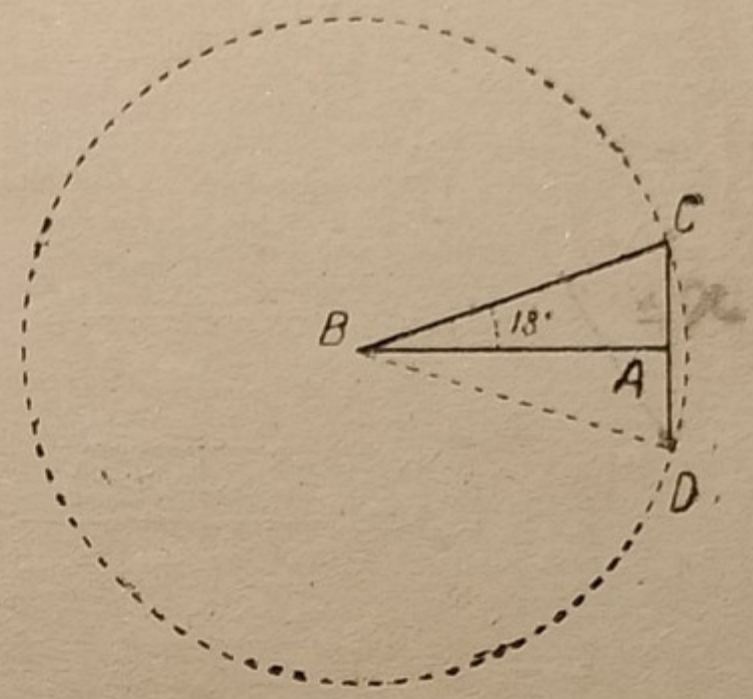


Fig. 4.

L'arco CD risulta di

$$36° = \frac{1}{10} \text{ di } 360°;$$

perciò la corda CD è il lato del decagono regolare di raggio BC.

Ora sappiamo che il lato del decagono regolare è la *parte aurea* del raggio; quindi, se con x si indica il valore di essa, siccome il valore del raggio BC è 1, si dovrà avere:

$$1 : x = x : (1 - x),$$

da cui

$$x^2 = 1 - x.$$

Questa equazione di 2° grado ha soluzioni *reali discordi*; e, pel nostro caso, soltanto quella positiva è accettabile; quindi il valore di CD è espresso da

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2};$$

e perciò quello di CA sarà:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = 0{,}309.....$$

Il valore del cateto BA sarà quindi:

$$\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=0{,}951\ldots$$

Allora (n. 7, oss. 1ª) si ha:

$$\operatorname{sen} 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=0{,}309\ldots;$$

$$\cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=0{,}951\ldots;$$

$$\operatorname{tg} 18^\circ=\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=0{,}324\ldots..$$

§ 4. — Relazioni fondamentali tra le funzioni trigonometriche di uno stesso angolo acuto.

12. — Indichiamo sempre con

$$a,\quad b,\quad c$$

i valori dell'ipotenusa BC e dei cateti AC, AB di un triangolo rettangolo ABC.

Dalla relazione pitagorica

$$b^2+c^2=a^2,$$

dividendo i due membri per a^2, si ricava:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=1;$$

e quindi, essendo

$$\frac{b}{a} = \text{sen}\,\widehat{B}\,; \qquad \frac{c}{a} = \cos\widehat{B},$$

si ha:

$$(\text{sen}\,\widehat{B})^2 + (\cos\widehat{B})^2 = 1$$

che si abbrevia scrivendo

$$\text{(1)} \qquad \text{sen}^2\,\widehat{B} + \cos^2\widehat{B} = 1\,;$$

cioè:

La somma dei quadrati del seno e del coseno di uno stesso angolo acuto è sempre eguale ad 1.

Si ha inoltre:

$$\frac{b}{c} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a}\,;$$

quindi, siccome

$$\frac{b}{c} = \text{tg}\,\widehat{B}\,; \quad \frac{b}{a} = \text{sen}\,\widehat{B}\,; \quad \frac{c}{a} = \cos\widehat{B}\,,$$

risulta:

$$\text{(2)} \qquad \text{tg}\,\widehat{B} = \frac{\text{sen}\,\widehat{B}}{\cos\widehat{B}},$$

cioè:

La tangente di un angolo acuto è sempre eguale al rapporto tra il seno e il coseno dello stesso angolo.

13. — Oss. — Le relazioni (1) e (2)

$$\text{(1)} \qquad \text{sen}^2\,\widehat{B} + \cos^2\widehat{B} = 1\,;$$

$$\text{(2)} \qquad \text{tg}\,\widehat{B} = \frac{\text{sen}\,\widehat{B}}{\cos\widehat{B}},$$

che diremo *relazioni fondamentali tra le funzioni trigono-*

metriche di uno stesso angolo, costituiscono un sistema di due equazioni con le tre indeterminate sen $\widehat{B}$, cos $\widehat{B}$, tg $\widehat{B}$; quindi, se una di queste è conosciuta, il sistema ci permette di calcolare i valori delle altre due. Pertanto possiamo dire che le relazioni fondamentali tra le funzioni trigonometriche di uno stesso angolo ci pongono in grado di risolvere il problema seguente:

Conoscendo una delle funzioni trigonometriche di un angolo acuto, calcolare le altre due.

14. — Vediamo come si può risolvere questo problema nei vari casi.

1° — *Dato sen $\widehat{B}$, calcolare cos $\widehat{B}$ e tg $\widehat{B}$.*

Dalla (1) si trae subito

$$\cos\widehat{B} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\widehat{B}}\ (^1),$$

per mezzo della quale si calcolerà cos $\widehat{B}$.

Il valore di tg $\widehat{B}$ si troverà poi subito dividendo sen $\widehat{B}$ per cos $\widehat{B}$.

Es. 1°. — *Calcolare cos $\widehat{B}$ e tg $\widehat{B}$, sapendo che sen $\widehat{B} = 0{,}6$.*

Si ha:

$$\cos\widehat{B} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\widehat{B}} = \sqrt{1 - (0{,}6)^2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8\,.$$

Quindi:

$$\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{\text{sen}\,\widehat{B}}{\cos\widehat{B}} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Es. 2°. — *Esprimere in funzione di m, n, i valori di cos $\widehat{B}$, tg $\widehat{B}$, sapendo che*

$$\text{sen}\,\widehat{B} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}\,.$$

---

(1) Sappiamo dall'Algebra che la radice quadrata, quando esiste, può avere due valori opposti. Nel nostro caso però essa deve essere un numero assoluto.

Si ha:

$$\cos \widehat{B} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \widehat{B}} = \sqrt{1 - \left(\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{n^2}{m^2+n^2}} = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Quindi:

$$\operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}}{\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}} = \frac{m}{n}.$$

2° — *Dato* $\cos \widehat{B}$, *calcolare* $\operatorname{sen} \widehat{B}$ *e* $\operatorname{tg} \widehat{B}$.
Risoluzione analoga a quella del 1° caso:

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{B}};$$

$$\operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \widehat{B}}}{\cos \widehat{B}}.$$

3° — *Data* $\operatorname{tg} \widehat{B}$, *calcolare* $\operatorname{sen} \widehat{B}$ *e* $\cos \widehat{B}$.
Dalla (2) si ricava:

$$\operatorname{sen}^2 \widehat{B} = \cos^2 \widehat{B} \operatorname{tg}^2 \widehat{B};$$

sostituendo questo valore nella (1), si ha:

$$\cos^2 \widehat{B}(1 + \operatorname{tg}^2 \widehat{B}) = 1,$$

da cui:

$$\cos \widehat{B} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \widehat{B}}},$$

e quindi, essendo $\operatorname{sen} \widehat{B} = \cos \widehat{B} \operatorname{tg} \widehat{B}$,

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{\operatorname{tg} \widehat{B}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \widehat{B}}}.$$

Es. — Calcolare sen $\widehat{B}$ e cos $\widehat{B}$, sapendo che $\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{8}{15}$.

Si ha:

$$\text{sen}\,\widehat{B} = \frac{\frac{8}{15}}{\sqrt{1+\left(\frac{8}{15}\right)^2}} = \frac{8}{\sqrt{15^2+8^2}} = \frac{8}{17};$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{8}{15}\right)^2}} = \frac{15}{\sqrt{15^2+8^2}} = \frac{15}{17}.$$

§ 5. — Funzioni trigonometriche di angoli complementari.

15. — Sia $\widehat{B}$ (fig. 1) un angolo acuto qualunque. Costruito il triangolo ABC, rettangolo in A, nel quale un angolo acuto sia eguale a $\widehat{B}$, si ha per *Df* (n. 5):

$$\text{sen}\,\widehat{B} = \frac{AC}{BC}; \qquad \cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC}; \qquad \text{tg}\,\widehat{B} = \frac{AC}{AB}.$$

Applicando la stessa *Df* all'angolo $\widehat{C}$, che, come sappiamo, è il *complemento* di $\widehat{B}$, si ha:

$$\text{sen}\,\widehat{C} = \frac{AB}{BC}; \qquad \cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC}; \qquad \text{tg}\,\widehat{C} = \frac{AB}{AC}.$$

Confrontando queste eguaglianze con le prime, troviamo:

$$\text{sen}\,\widehat{C} = \cos\widehat{B}; \qquad \cos\widehat{C} = \text{sen}\,\widehat{B}; \qquad \text{tg}\,\widehat{C} = \frac{1}{\text{tg}\,\widehat{B}};$$

cioè:

Il seno di un angolo acuto è eguale al coseno del suo complemento.

Il coseno di un angolo acuto è eguale al seno del suo complemento.

Le tangenti di due angoli complementari sono due numeri inversi.

Tutto ciò si esprime per mezzo delle formole:

$$\text{sen } x = \cos (90° - x);$$

$$\cos x = \text{sen } (90° - x):$$

$$\text{tg } x = \frac{1}{\text{tg } (90° - x)}.$$

Così (v. nn. 8, 9, 10, 11):

$$\text{sen } 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad 0,7071$$

$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad 0,866$$

$$\cos 60° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}; \quad 0,5$$

$$\text{tg } 60° = \frac{1}{\text{tg } 30°} = \sqrt{3};$$

$$\text{sen } 72° = \cos 18° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}; \quad 0,951$$

$$\cos 72° = \text{sen } 18° = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}; \quad 0,309$$

$$\text{tg } 72° = \frac{1}{\text{tg } 18°} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{-1 + \sqrt{5}}.$$

16. — Oss. 1ª — Il numero inverso della tangente di un angolo acuto si dice *cotangente* dell'angolo stesso. — Quindi:

La cotangente di un angolo acuto è eguale alla tangente del suo complemento (analogamente al *seno* e al *coseno*).

Oss. 2ª — Da quanto precede risulta che quando si conoscono il *seno*, il *coseno*, la *tangente* e la *cotangente* degli angoli non superiori a 45°, si hanno subito anche le funzioni degli angoli compresi tra 45° e 90°.

Oss. 3ª — Per brevità scriveremo *cotg* invece di *cotangente*.

§ 6. — Relazioni tra lati ed angoli in un triangolo rettangolo.

17. — Sia ABC (fig. 5) un triangolo rettangolo in A; e si indichino con a, b, c, rispettivamente i valori dell'ipotenusa BC, e dei cateti CA, AB, riferiti ad una stessa misura.

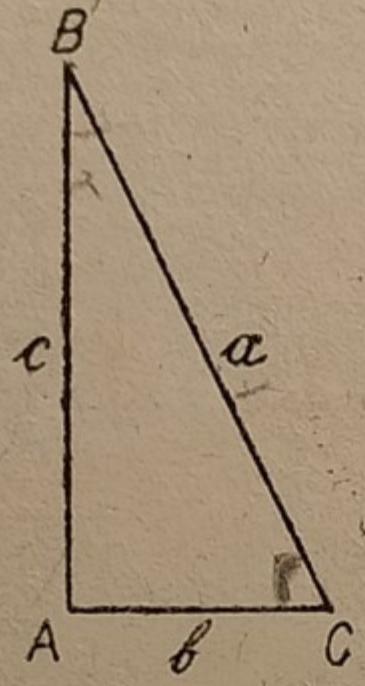


Fig. 5.

Sappiamo che

$$\frac{b}{a} = \text{sen}\,\widehat{B}\,; \qquad \frac{c}{a} = \cos\widehat{B}\,; \qquad \frac{b}{c} = \text{tg}\,\widehat{B}\,;$$

quindi:

$$(1) \qquad b = a\,\text{sen}\,\widehat{B}\,; \quad c = a\cos\widehat{B}\,; \quad b = c\,\text{tg}\,\widehat{B}\,;$$

e poichè

$$\frac{1}{\text{tg}\,\widehat{B}} = \text{cotg}\,\widehat{B}\,,$$

si ha pure:

$$(2) \qquad c = b\,\text{cotg}\,\widehat{B}\,.$$

Le eguaglianze (1) e (2) esprimono che:

In ogni triangolo rettangolo ciascun cateto è eguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto; — oppure *al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo acuto adiacente*; — oppure *al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto*; — oppure *al prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo acuto adiacente.*

§ 7. — Lato e apotema di un poligono regolare in funzione del raggio.

18. — *Se n è il numero dei lati di un poligono regolare inscritto in un cerchio di raggio R, il lato l_n del poligono è espresso dalla formula:*

$$(1) \qquad l_n = 2R \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n}.$$

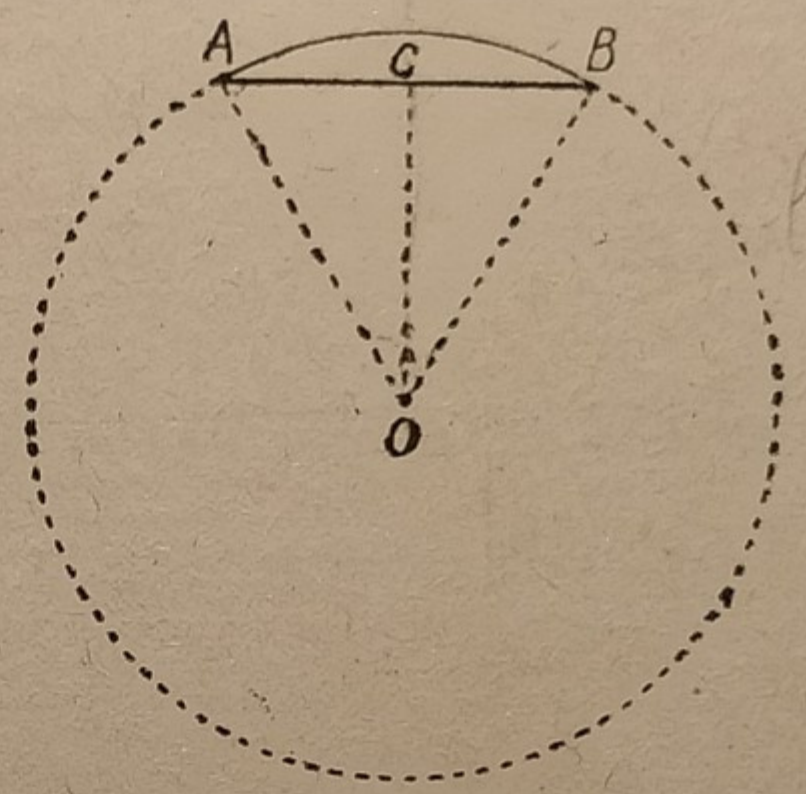


Fig. 6.

Infatti, se AB (fig. 6) è il lato del poligono regolare, e OC è il suo apotema, dal triangolo rettangolo ACO si ricava:

$$AC = OA \operatorname{sen} \widehat{AOC};$$

e poichè

$$l_n = 2AC; \quad OA = R; \quad \widehat{AOC} = \frac{180^\circ}{n},$$

risulta:

$$\frac{1}{2} l_n = R \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n},$$

da cui la (1).

Casi particolari. — 1° — Se $n = 3$, dalla (1) si trae:

$$l_3 = 2R \operatorname{sen} 60^\circ.$$

Ma $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, perciò:

$$l_3 = R\sqrt{3}.$$

(*Il lato del triangolo equilatero inscritto in un cerchio è eguale al prodotto del raggio per* $\sqrt{3}$).

2° — Se $n = 4$, dalla (1) si ricava:

$$l_4 = 2R \operatorname{sen} 45^\circ.$$

Ma sen $45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, perciò:

$$l_4 = R\sqrt{2}.$$

(*Il lato del quadrato inscritto in un cerchio è eguale al prodotto del raggio per* $\sqrt{2}$).

3° — Se $n = 6$, la (1) dà:

$$l_6 = 2R \text{ sen } 30°.$$

Ma sen $30° = \frac{1}{2}$, perciò:

$$l_6 = R.$$

(Il lato dell'esagono regolare è eguale al raggio).

4° — Se $n = 10$, dalla (1) ricaviamo:

$$l_{10} = 2R \text{ sen } 18°.$$

Ma sen $18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, perciò:

$$l_{10} = R.\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R.$$

[*Il lato del decagono regolare è eguale al prodotto del raggio per* $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$].

19. — *Se n è il numero dei lati di un poligono regolare inscritto in un cerchio di raggio R, l'apotema* a_n *del poligono è espressa da*

$$(2) \qquad a_n = R\cos\frac{180°}{n}.$$

Infatti (fig. 6), dal triangolo rettangolo AOC si ricava:

$$OC = OA\cos\widehat{AOC},$$

ossia

$$a_n = R\cos\frac{180°}{n}.$$

Casi particolari. — 1° — Se $n = 3$, dalla (2) si trae:

$$a_3 = R \cos 60° ;$$

ma $\cos 60° = \frac{1}{2}$, perciò:

$$a_3 = \frac{1}{2} R .$$

(L'apotema del triangolo equilatero è la metà del suo raggio).

2° — Se $n = 4$, la (2) ci dà:

$$a_4 = R \cos 45° ;$$

ma $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, perciò:

$$a_4 = R \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

(L'apotema del quadrato inscritto è eguale al prodotto del raggio per $\frac{1}{2}\sqrt{2}$*)*.

3° — Se $n = 6$, dalla (2) si trae:

$$a_6 = R . \cos 30° ;$$

ma $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, perciò:

$$a_6 = R . \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

(L'apotema dell'esagono regolare è eguale al prodotto del raggio, cioè del lato, per $\frac{1}{2}\sqrt{3}$*)*.

§ 8. — Formole per l'addizione degli angoli.

20. — Ci proponiamo, in ciò che segue, di risolvere questo problema:

Conoscendo le funzioni trigonometriche di due angoli

acuti α *e* β, *la cui somma sia minore di* 90°, *calcolare quelle dell'angolo* (α + β).

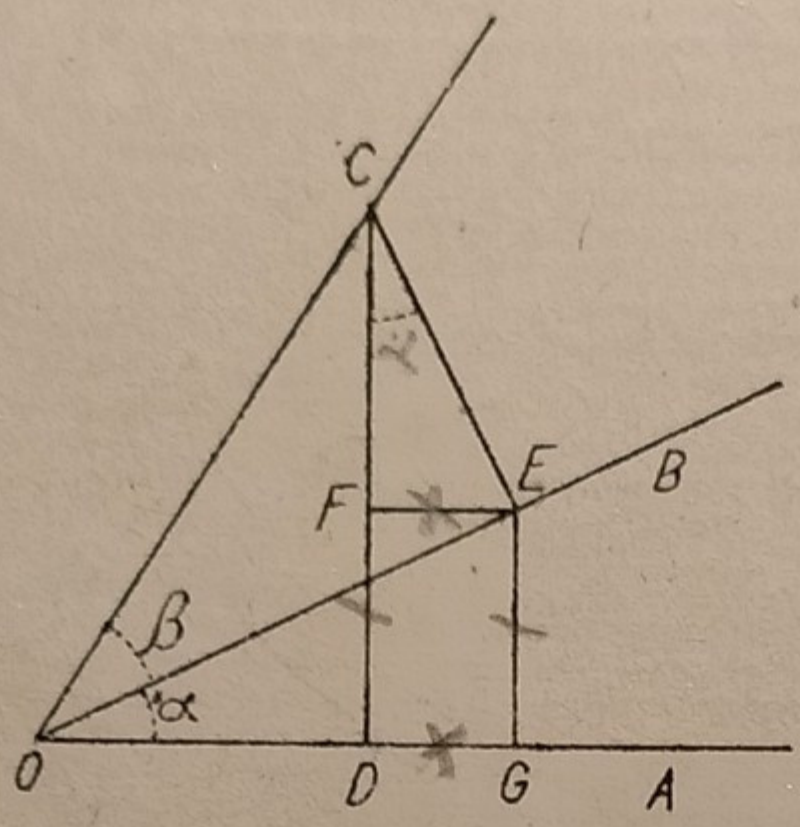


Fig. 7.

Siano i due angoli consecutivi $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ (fig. 7) rispettivamente eguali ad α, β, e tali che la loro somma $\widehat{AOC}$ sia un angolo acuto.

Dal punto C si conducano CD, CE rispettivamente normali ad OA, OB; e dal punto E le EF, EG normali a CD, OA. Ne risulta l'angolo $\widehat{FCE} = \alpha$.

Tenendo conto dei vari triangoli rettangoli della figura e delle funzioni trigonometriche degli angoli α, β, ricaviamo:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{CD}{OC} = \frac{EG}{OC} + \frac{CF}{OC} = \frac{OE\operatorname{sen}\alpha}{OC} + \frac{CE\cos\alpha}{OC}$$

$$= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\,;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OD}{OC} = \frac{OG}{OC} - \frac{FE}{OC} = \frac{OE\cos\alpha}{OC} - \frac{CE\operatorname{sen}\alpha}{OC}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Dalle formule

$$(1)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\,, \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\,, \end{cases}$$

dividendo membro a membro risulta:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}\,;$$

e dividendo i due termini della frazione per $\cos\alpha\cos\beta$, si ha:

$$(2)\qquad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,.$$

Le (1) e (2), dette *formule per l'addizione degli angoli* (o *degli archi*), risolvono appunto il problema enunciato.

Applicazione. — *Trovare le funzioni trigonometriche di 75°.*

Si ha $75° = 45° + 30°$; se quindi nelle (1) e (2) si pone $\alpha = 45°$, e $\beta = 30°$, si trova:

$$\operatorname{sen} 75° = \operatorname{sen} 45° \cos 30° + \cos 45° \operatorname{sen} 30°;$$

$$\cos 75° = \cos 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30°;$$

$$\operatorname{tg} 75° = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°}.$$

E, ricordando i valori delle funzioni trigonometriche di 45° e 30°, dopo facili riduzioni si trova:

$$\operatorname{sen} 75° = \frac{1}{4}\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + 1);$$

$$\cos 75° = \frac{1}{4}\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1);$$

$$\operatorname{tg} 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}.$$

§ 9. — Formole per la sottrazione degli angoli.

21. — Siano α e β due angoli acuti; e sia $\alpha > \beta$. — Applicando le formule per l'addizione ai due angoli acuti $(90° - \alpha)$ e β, la cui somma è minore di 90°, si ha:

$$\operatorname{sen}(90° - \alpha + \beta) = \operatorname{sen}(90° - \alpha)\cos\beta + \cos(90° - \alpha)\operatorname{sen}\beta;$$

$$\cos(90° - \alpha + \beta) = \cos(90° - \alpha)\cos\beta - \operatorname{sen}(90° - \alpha)\operatorname{sen}\beta.$$

E poichè il seno di un angolo è eguale al coseno del complemento, e viceversa, si ricava:

$$(3)\quad \begin{cases} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta; \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta. \end{cases}$$

Da queste due formule, dividendo membro a membro, in modo analogo a quanto si è fatto per le (1), si ricava;

$$(4) \qquad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Le (3) e (4), dette *formule per la sottrazione degli angoli*, permettono di risolvere il problema:

Conoscendo le funzioni trigonometriche di due angoli acuti diseguali, calcolare le funzioni trigonometriche della loro differenza.

Applicazione. — *Trovare le funzioni trigonometriche di*

$$12° = 30° - 18°.$$

Basterà porre nelle formule (3) e (4):

$$\alpha = 30°; \quad \beta = 18°,$$

e tener presenti i valori delle funzioni trigonometriche di 30° e 18°.

§ 10. — Formole per la duplicazione degli angoli.

22. — Se nelle formule per l'addizione (1) e (2) si pone $\alpha = \beta$, si ricava subito:

$$(5) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha; \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha; \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \end{cases}$$

Le (5), dette *formule per la duplicazione degli angoli*, esprimono le funzioni trigonometriche del doppio di un angolo in funzione di quelle dell'angolo. — Si noti che α deve essere minore di 45°.

Applicazione. — *Calcolare le funzioni trigonometriche di*

$$36° = 2 \cdot 18°.$$

Basterà porre nelle (5):

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{4};$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Oss. 1ª. — La seconda delle (5) si può esprimere in altri modi. — Ponendo in essa $1-\operatorname{sen}^2\alpha$ in luogo di $\cos^2\alpha$, si ha:

$$(6) \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha .$$

E se invece si pone $1-\cos^2\alpha$ in luogo di $\operatorname{sen}^2\alpha$, si trova:

$$(7) \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 .$$

Le (6) e (7) esprimono rispettivamente $\cos 2\alpha$ in funzione di $\operatorname{sen}\alpha$, o di $\cos\alpha$.

Oss. 2ª. — Applicando le formule (5) all'angolo $\frac{1}{2}\alpha$, invece che all'angolo α, si ha:

$$(8)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha; \\ \cos\alpha = \cos^2\frac{1}{2}\alpha - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\alpha; \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}. \end{cases}$$

Le (8) non sono che un'altra forma delle formule (5) per la duplicazione. — In queste, α può essere un angolo acuto qualunque.

Analogamente, dalle (6) e (7) si ricava:

$$(9) \qquad \cos\alpha = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha\,;$$

$$(10) \qquad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\,\alpha - 1.$$

§ 11. — Formole per la bisezione degli angoli.

23. — Risolvendo le (9) e (10) rispetto a $\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\alpha$ e $\cos\frac{1}{2}\,\alpha$, si ha:

$$(11) \qquad \mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,;$$

$$(12) \qquad \cos\frac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\,;$$

(siccome il *seno* e il *coseno* di un angolo acuto sono numeri assoluti, le radici vanno anch'esse prese nel loro valore assoluto).

Dalle (11) e (12), dividendo membro a membro, si trae:

$$(13) \qquad \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\,.$$

Le (11), (12), (13), dette *formule per la bisezione degli angoli*, permettono di risolvere il problema:

Conoscendo il coseno di un angolo, calcolare le funzioni trigonometriche della metà di esso.

Applicazione. — *Calcolare le funzioni trigonometriche di 22°30′.*

Ponendo $\alpha = 45°$ nelle formole (11), (12) e (13), e ricordando che

$$\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,,$$

si trova subito:

$$\text{sen } 22°30' = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos 22°30' = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2};$$

$$\text{tang } 22°30' = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1.$$

§ 12. — Tavole trigonometriche e loro uso.

24. — Data l'ampiezza di un angolo acuto, ognuno è in grado di ricavare, mediante i rapporti tra i lati di un triangolo rettangolo che abbia quell'angolo acuto, i valori delle corrispondenti funzioni trigonometriche; e inversamente, dato il valore di una funzione trigonometrica, si può costruire, e quindi misurare, per es. col *rapportatore*, l'angolo corrispondente.

Ma in queste operazioni, per quanto in pratica dobbiamo contentarci di risultati approssimati, non è facile poi riconoscere il *grado di approssimazione* raggiunto; maggiore precisione si ottiene con metodi che qui non è il caso di esporre.

Solo per certi angoli, e precisamente per alcuni di quelli che si sanno costruire *geometricamente* (cioè per mezzo della *riga* e del *compasso*) abbiamo veduto come si possano determinare i valori delle rispettive funzioni trigonometriche.

Per tutti i casi però i valori esatti, o per lo più approssimati, delle funzioni trigonometriche si trovano già calcolati e registrati in apposite *tavole*.

Le seguenti *tavole trigonometriche* sono costituite di due parti essenzialmente distinte.

Ogni pagina, nella parte rettangolare *sinistra*, contiene i valori approssimati, con quattro cifre decimali, del *seno*, *coseno*, *tangente* e *cotangente* per gli angoli acuti di 10′ in 10′. Nella parte rettangolare *destra* si hanno i logaritmi decimali delle stesse funzioni.

Avvertenza. — Siccome gli angoli acuti sono *compresi* tra 0° e 90°, in queste tavole sono anche segnati i valori ed i logaritmi delle *funzioni trigonometriche dei due angoli speciali 0° e 90°*, funzioni di cui dovremo parlare nella seconda parte di questo trattato.

Angoli	Valori delle funzioni				Logaritmi delle funzioni				Angoli
	Sen	Cos	Tg	Cotg	Sen	Cos	Tg	Cotg	
0° 0′	0,0000	1,0000	0,0000	∞	—	0,0000	—	∞	0′ 90°
10′	0029	0,9999	0029	343,7737	$\bar{3}$,4637	0000	$\bar{3}$,4637	2,5363	50′
20′	0058	9999	0058	171,8854	7648	0000	7648	2352	40′
30′	0087	9999	0087	114,5886	9408	0000	9409	0591	30′
40′	0116	9999	0116	85,9398	$\bar{2}$,0658	$\bar{1}$,9999	$\bar{2}$,0658	1,9342	20′
50′	0145	9999	0145	68,7501	1626	9999	1627	8373	10′
1° 0′	0,0174	0,9998	0,0175	57,2900	$\bar{2}$,2419	$\bar{1}$,9999	$\bar{2}$,2419	1,7581	0′ 89°
10′	0204	9998	0204	49,1039	3088	9999	3089	6911	50′
20′	0233	9997	0233	42,9641	3668	9999	3669	6331	40′
30′	0262	9997	0262	38,1885	4179	9998	4190	5819	30′
40′	0291	9996	0291	34,3678	4637	9998	4638	5362	20′
50′	0320	9995	0320	31,2416	5050	9998	5053	4947	10′
2° 0′	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	2,5428	$\bar{1}$,9997	$\bar{2}$,5431	1,4569	0′ 88°
10′	0378	9993	0378	26,4316	5776	9997	5779	4221	50′
20′	0407	9992	0407	24,5418	6097	9996	6101	3899	40′
30′	0436	9990	0437	22,9038	6397	9996	6401	3599	30′
40′	0465	9989	0466	21,4704	6677	9995	6682	3318	20′
50′	0494	9988	0495	20,2055	6940	9995	6945	3055	10′
3° 0′	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	$\bar{2}$,7188	$\bar{1}$,9994	$\bar{2}$,7194	1,2806	0′ 87°
10′	0552	9985	0553	18,0750	7423	9993	7429	2571	50′
20′	0581	9983	0582	17,1693	7645	9993	7652	2348	40′
30′	0610	9981	0612	16,3499	7857	9992	7865	2135	30′
40′	0640	9980	0641	15,6048	8059	9991	8067	1933	20′
50′	0668	9978	0670	14,9244	8251	9990	8261	1739	10′
4° 0′	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	$\bar{2}$,8436	$\bar{1}$,9989	$\bar{2}$,8446	1,1554	0′ 86°
10′	0727	9974	0728	13,7267	8613	9988	8624	1376	50′
20′	0756	9971	0758	13,1969	8783	9988	8795	1205	40′ 85°
	Cos	Sen	Cotg	Tg	Cos	Sen	Cotg	Tg	

Angoli	Valori delle funzioni				Logaritmi delle funzioni				Angoli
	Sen	Cos	Tg	Cotg	Sen	Cos	Tg	Cotg	
4° 30′	0,0785	0,9969	0,0787	12,7062	$\bar{2}$,8946	$\bar{1}$,9987	$\bar{2}$,8960	1,1040	30′
40′	0814	9967	0816	2505	9104	9986	9118	0882	20′
50′	0843	9964	0846	11,8262	9256	9984	9272	0728	10′
5° 0′	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	$\bar{2}$,9403	$\bar{1}$,9983	$\bar{2}$,9420	1,0580	0′ 85°
10′	0900	9960	0904	0594	9545	9982	9563	0437	50′
20′	0930	9957	0934	10,7119	9682	9981	9701	0299	40′
30′	0958	9954	0963	3854	9816	9980	9836	0164	30′
40′	0987	9951	0992	0780	9945	9979	9966	0034	20′
50′	1016	9948	1022	9,7882	$\bar{1}$,0070	9977	$\bar{1}$,0093	0,9907	10′
6° 0′	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	$\bar{1}$,0192	$\bar{1}$,9976	$\bar{1}$,0216	0,9784	0′ 84°
10′	1074	9942	1081	2553	0311	9975	0336	9664	50′
20′	1103	9939	1110	0098	0426	9973	0453	9547	40′
30′	1132	9936	1139	8,7769	0539	9972	0567	9433	30′
40′	1161	9932	1169	5555	0648	9971	0678	9322	20′
50′	1190	9929	1198	3450	0755	9969	0786	9214	10′
7° 0′	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	$\bar{1}$,0859	$\bar{1}$,9968	$\bar{1}$,0891	0,9109	0′ 83°
10′	1248	9922	1257	7,9530	0961	9966	0995	9005	50′
20′	1276	9918	1287	7704	1060	9964	1096	8904	40′
30′	1305	9914	1316	5957	1157	9963	1194	8806	30′
40′	1334	9911	1346	4287	1252	9961	1291	8709	20′
50′	1363	9907	1376	2687	1345	9959	1385	8615	10′
8° 0′	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	$\bar{1}$,1436	$\bar{1}$,9958	$\bar{1}$,1478	0,8522	0′ 82°
10′	1420	9899	1435	6,9682	1524	9956	1569	8431	50′
20′	1449	9894	1465	8269	1612	9954	1658	8342	40′
30′	1478	9890	1494	6912	1697	9952	1745	8255	30′
40′	1507	9886	1524	5606	1781	9950	1831	8169	20′
50′	1536	9881	1554	4348	1863	9948	1915	8085	10′ 81°
	Cos	Sen	Cotg	Tg	Cos	Sen	Cotg	Tg	

Angoli	Valori delle funzioni				Logaritmi delle funzioni				Angoli
	Sen	Cos	Tg	Cotg	Sen	Cos	Tg	Cotg	
9° 0′	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	$\bar{1}$,1943	$\bar{1}$,9946	$\bar{1}$,1997	0,8003	0′ 81°
10′	1593	9872	1614	1970	2022	9944	2078	7922	50′
20′	1622	9868	1644	0844	2100	9942	2158	7842	40′
30′	1651	9863	1674	5,9758	2176	9940	2236	7764	30′
40′	1679	9858	1703	8708	2251	9938	2313	7687	20′
50′	1708	9853	1733	7694	2324	9936	2389	7611	10′
10° 0′	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	$\bar{1}$,2397	$\bar{1}$,9934	$\bar{1}$,2463	0,7537	0′ 80°
10′	1765	9843	1793	5764	2468	9931	2536	7463	50′
20′	1794	9838	1823	4845	2538	9929	2609	7391	40′
30′	1824	9832	1853	3955	2606	9927	2680	7320	30′
40′	1851	9827	1883	3093	2674	9924	2750	7250	20′
50′	1879	9822	1914	2257	2740	9922	2819	7181	10′
11° 0′	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	$\bar{1}$,2806	$\bar{1}$,9919	$\bar{1}$,2887	0,7113	0′ 79°
10′	1937	9811	1974	0658	2870	9917	2953	7040	50′
20′	1965	9805	2004	4,9844	2934	9914	3020	6980	40′
30′	1994	9799	2034	9152	2997	9912	3085	6915	30′
40′	2022	9793	2065	8430	3058	9909	3149	6851	20′
50′	2051	9788	2095	7729	3119	9907	3212	6788	10′
12° 0′	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	$\bar{1}$,3179	$\bar{1}$,9904	$\bar{1}$,3275	0,6725	0′ 78°
10′	2108	9775	2156	6382	3238	9901	3336	6663	50′
20′	2136	9769	2186	5736	3296	9899	3397	6603	40′
30′	2164	9763	2217	5107	3353	9896	3458	6542	30′
40′	2193	9757	2247	4494	3410	9893	3517	6483	20′
50′	2221	9750	2278	3897	3466	9890	3576	6424	10′
13° 0′	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	$\bar{1}$,3521	$\bar{1}$,9887	$\bar{1}$,3634	0,6366	0′ 77°
10′	2278	9737	2339	2747	3575	9884	3691	6309	50′
20′	2306	9730	2370	2193	3629	9881	3748	6252	40′ 76°
	Cos	Sen	Cotg	Tg	Cos	Sen	Cot g	Tg	

Angoli	Valori delle funzioni				Logaritmi delle funzioni				Angoli	
	Sen	Cos	Tg	Cotg	Sen	Cos	Tg	Cotg		
13° 30′	0,2334	0,9724	0,2001	4,1653	$\bar{1}$,3682	$\bar{1}$,9878	$\bar{1}$,3804	0,6196	30′	
40′	2363	9717	2432	1126	3734	9875	3859	6141	20′	
50′	2391	9710	2462	0611	3786	9872	3914	6086	10′	
14° 0′	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	$\bar{1}$,3837	$\bar{1}$,9869	$\bar{1}$,3968	0,6032	0′	76°
10′	2447	9696	2524	3,9616	3887	9866	4021	5979	50′	
20′	2476	9689	2555	9136	3937	9863	4074	5926	40′	
30′	2504	9681	2586	8667	3986	9859	4127	5873	30′	
40′	2532	9674	2617	8208	4035	9856	4178	5822	20′	
50′	2560	9667	2648	7759	4083	9853	4230	5770	10′	
15° 0′	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	$\bar{1}$,4130	$\bar{1}$,9849	$\bar{1}$,4281	0,5719	0.	75°
10′	2616	9652	2711	6891	4177	9846	4331	5669	50′	
20′	2644	9644	2742	6470	4223	9843	4381	5619	40′	
30′	2672	9636	2773	6059	4269	9839	4430	5570	30′	
40′	2700	9628	2805	5656	4314	9836	4479	5521	20′	
50′	2728	9621	2836	5261	4359	9832	4527	5473	10′	
16° 0′	0,2656	0,9613	0,2867	3,4874	$\bar{1}$,4403	$\bar{1}$,9828	$\bar{1}$,4575	0,5425	0′	74°
10′	2784	9605	2899	4495	4447	9825	4622	5378	50′	
20′	2812	9596	2931	4124	4491	9821	4669	5331	40′	
30′	2840	9588	2962	3759	4533	9817	4716	5284	30′	
40′	2868	9580	2994	3402	4576	9814	4762	5238	20′	
50′	2896	9571	3026	3052	4618	9810	4808	5192	10′	
17° 0′	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	$\bar{1}$,4659	$\bar{1}$,9806	$\bar{1}$,4853	0,5147	0′	73°
10′	2951	9554	3089	2371	4700	9802	4898	5102	50′	
20′	2979	9546	3121	2041	4741	9798	4943	5057	40′	
30′	3007	9537	3153	1716	4781	9794	4987	5013	30′	
40′	3035	9528	3185	1397	4821	9790	5031	4969	20′	
50′	3062	9519	3217	1084	4861	9786	5075	4925	10′	72°
	Cos	Sen	Cotg	Tg	Cos	Sen	Cotg	Tg		

Angoli	Valori delle funzioni				Logaritmi delle funzioni				Angoli
	Sen	Cos	Tg	Cotg	Sen	Cos	Tg	Cotg	
18° 0′	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	$\bar{1}$,4900	$\bar{1}$,9782	$\bar{1}$,5118	0,4882	0′ 72°
10′	3118	9501	3281	0475	4939	9778	5161	4839	50′
20′	3145	9492	3314	0178	4977	9774	5203	4797	40′
30′	3173	9483	3346	2,9887	5015	9770	5245	4755	30′
40′	3201	9474	3378	9600	5052	9765	5287	4713	20′
50′	3228	9465	3411	9319	5101	9761	5329	4671	10′
19° 0′	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	$\bar{1}$,5126	$\bar{1}$,9757	$\bar{1}$,5370	0,4630	0′ 71°
10′	3283	9446	3476	8770	5163	9752	5410	4589	50′
20′	3311	9436	3508	8502	5199	9748	5451	4549	40′
30′	3338	9426	3541	8239	5235	9743	5491	4509	30′
40′	3365	9417	3574	7980	5270	9739	5531	4469	20′
50′	3393	9407	3609	7725	5306	9734	5571	4429	10
20° 0′	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	$\bar{1}$,5341	$\bar{1}$,9730	$\bar{1}$,5611	0,4389	0′ 70°
10′	3447	9387	3673	7228	5375	9725	5650	4350	50′
20′	3475	9377	3706	6985	5409	9721	5689	4311	40′
30′	3502	9367	3739	6746	5443	9716	5727	4273	30′
40′	3529	9356	3772	6511	5477	9711	5766	4234	20′
50′	3556	9346	3805	6279	5510	9706	5804	4196	10′
21° 0′	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	$\bar{1}$,5543	$\bar{1}$,9702	$\bar{1}$,5842	0,4158	0′ 69°
10′	3611	9325	3872	5826	5576	9697	5879	4121	50′
20′	3638	9315	3906	5605	5609	9692	5917	4083	40′
30′	3665	9304	3939	5386	5641	9687	5954	4046	30′
40′	3692	9293	3973	5172	5673	9682	5991	4009	20′
50′	3719	9283	4006	4960	5704	9677	6028	3972	10′
22° 0′	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	$\bar{1}$,5736	$\bar{1}$,9672	$\bar{1}$,6064	0,3936	0′ 68°
10′	3773	9261	4074	4545	5767	9667	6100	3900	50′
20′	3800	9250	4108	4342	5798	9661	6136	3864	40′ 67°
	Cos	Sen	Cotg	Tg	Cos	Sen	Cotg	Tg	

Angoli	Valori delle funzioni				Logaritmi delle funzioni				Angoli	
	Sen	Cos	Tg	Cotg	Sen	Cos	Tg	Cotg		
22° 30′	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142	$\bar{1}$,5828	$\bar{1}$,9656	$\bar{1}$,6172	0,3828	30′	
40′	3854	9228	4176	3945	5859	9651	6208	3792	20′	
50′	3881	9216	4210	3750	5889	9646	6243	3757	10′	
23° 0′	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	$\bar{1}$,5919	$\bar{1}$,9640	$\bar{1}$,6279	0,3721	0′	67°
10′	3934	9194	4279	3369	5948	9635	6314	3686	50′	
20′	3961	9182	4314	3183	5978	9629	6348	3652	40′	
30′	3987	9171	4348	2998	6007	9624	6383	3617	30′	
40′	4014	9159	4383	2817	6036	9618	6417	3583	20′	
50′	4041	9147	4417	2637	6065	9613	6452	3548	10′	
24° 0′	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	$\bar{1}$,6093	$\bar{1}$,9607	$\bar{1}$,6486	0,3514	0′	66°
10′	4094	9124	4487	2286	6121	9602	6520	3480	50′	
20′	4120	9112	4522	2113	6149	9596	6553	3447	40′	
30′	4147	9100	4557	1943	6177	9590	6587	3413	30′	
40′	4173	9088	4592	1775	6205	9584	6620	3380	20′	
50′	4200	9075	4628	1609	6232	9579	6654	3346	10′	
25° 0′	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	$\bar{1}$,6259	$\bar{1}$,9573	$\bar{1}$,6687	0,3313	0′	65°
10′	4253	9051	4699	1283	6286	9567	6720	3280	50′	
20′	4279	9038	4734	1123	6313	9561	6752	3248	40′	
30′	4305	9026	4770	0965	6340	9555	6785	3215	30′	
40′	4331	9013	4806	0809	6366	9549	6817	3183	20′	
50′	4358	9001	4841	0655	6392	9543	6885	3150	10′	
26° 0′	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	$\bar{1}$,6418	$\bar{1}$,9537	$\bar{1}$,6882	0,3118	0′	64°
10′	4410	8975	4913	0353	6444	9530	6914	3086	50′	
20′	4436	8962	4950	0204	6470	9424	6946	3054	40′	
30′	4462	8949	4986	0057	6495	9518	6977	3023	30′	
40′	4488	8936	5022	1,9912	6521	9512	7009	2991	20′	
50′	4514	8923	5059	9768	6546	9505	7040	2960	10′	63°
	Cos	Sen	Cotg	Tg	Cos	Sen	Cotg	Tg		

Angoli	Valori delle funzioni				Logaritmi delle funzioni				Angoli	
	Sen	Cos	Tg	Cotg	Sen	Cos	Tg	Cotg		
27° 0′	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	$\bar{1}$,6570	$\bar{1}$,9499	$\bar{1}$,7072	0,2928	0′	63°
10′	4566	8897	5132	9486	6595	9492	7103	2897	50′	
20′	4592	8884	5169	9347	6620	9486	7134	2866	40′	
30′	4617	8870	5206	9210	6644	9479	7165	2835	30′	
40′	4643	8857	5243	9074	6668	9473	7196	2804	20′	
50	4669	8843	5280	8940	6692	9466	7226	2774	10′	
28° 0′	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	$\bar{1}$,6716	$\bar{1}$,9459	$\bar{1}$,7257	0,2743	0′	62°
10′	4720	8816	5355	8676	6740	9453	7287	2713	50′	
20′	4746	8802	5392	8546	6763	9446	7317	2683	40′	
30′	4772	8788	5430	8418	6787	9439	7348	2652	30′	
40′	4797	8774	5467	8291	6810	9432	7378	2622	20′	
50′	4823	8760	5505	8165	6833	9425	7408	3592	10′	
29° 0′	0,4843	0,8746	0,5543	1,8040	$\bar{1}$,6856	$\bar{1}$,9418	$\bar{1}$,7438	0,2562	0′	61°
10′	4874	8732	5581	7917	6878	9411	7467	2533	50′	
20′	4899	8718	5619	7796	6901	9404	7497	2503	40′	
30′	4924	8704	5658	7675	6923	9397	7526	2474	30′	
40′	4950	8689	5696	7576	6946	9390	7556	2444	20′	
50′	4975	8675	5735	7437	6968	9383	7585	2415	10′	
30° 0′	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	$\bar{1}$,6990	$\bar{1}$,9375	$\bar{1}$,7614	0,2386	0′	60°
10′	5025	8646	5812	7205	7011	9368	7644	2356	50′	
20′	5050	8631	5851	7090	7033	9361	7673	2327	40′	
30′	5075	8616	5890	6977	7055	9353	7701	2299	30′	
40′	5100	8602	5930	6864	7076	9346	7730	2270	20′	
50′	5125	8587	5969	6753	7097	9338	7759	2241	10′	
31° 0′	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	$\bar{1}$,7118	$\bar{1}$,9331	$\bar{1}$,7788	0,2212	0′	59°
10′	5175	8557	6048	6534	7139	9323	7816	2184	50′	
20′	5200	8542	6088	6426	7160	9315	7845	2155	40′	58°
	Cos	Sen	Cotg	Tg	Cos	Sen	Cotg	Tg		

Angoli	Valori delle funzioni				Logaritmi delle funzioni				Angoli	
	Sen	Cos	Tg	Cotg	Sen	Cos	Tg	Cotg		
31° 30′	0,5225	0,8526	0,6128	1,6319	$\bar{1}$,7181	$\bar{1}$,9308	$\bar{1}$,7873	1,2127	30′	
40′	5250	8511	6168	6212	7201	9300	7902	2098	20′	
50′	5275	8496	6208	6107	7222	9292	7930	2070	10′	
32° 0′	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	$\bar{1}$,7242	$\bar{1}$,9284	$\bar{1}$,7958	0,2042	0′	**58°**
10′	5324	8465	6289	5900	7262	9276	7986	2014	50′	
20′	5348	8450	6330	5798	7282	9268	8014	1986	40′	
30′	5373	8434	6371	5697	7302	9261	8042	1958	30′	
40′	5398	8418	6412	5597	7322	9252	8070	1930	20′	
50′	5422	8403	6453	5497	7342	9244	8097	1903	10′	
33° 0′	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	$\bar{1}$,7361	$\bar{1}$,9236	$\bar{1}$,8125	0,1875	0′	**57°**
10′	5471	8371	6536	5301	7380	9228	8153	1847	50′	
20′	5495	8355	6577	5204	7400	9219	8180	1820	40′	
30′	5519	8339	6619	5108	7419	9211	8208	1792	30′	
40′	5544	8323	6661	5013	7438	9203	8235	1765	20′	
50′	5568	8307	6703	4919	7457	9194	8263	1737	10′	
34° 0′	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	$\bar{1}$,7476	$\bar{1}$,9186	$\bar{1}$,8290	0,1710	0′	**56°**
10′	5616	8274	6787	4733	7494	9177	8317	1683	50′	
20′	5640	8258	6830	4641	7513	9169	8344	1656	40′	
30′	5664	8241	6873	4550	7531	9160	8371	1629	30′	
40′	5688	8225	6916	4460	7550	9151	8398	1602	20′	
50′	5712	8208	6959	4370	7568	9142	8425	1575	10′	
35° 0′	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	$\bar{1}$,7586	$\bar{1}$,9134	$\bar{1}$,8452	0,1548	0′	**55°**
10′	5760	8175	7046	4193	7604	9125	8479	1521	50′	
20′	5783	8158	7089	4106	7622	9116	8506	1494	40′	
30′	5807	8141	7133	4019	7640	9107	8533	1467	30′	
40′	5831	8124	7177	3934	7657	9098	8559	1441	20′	
50′	5854	8107	7221	3848	7675	9089	8586	1414	10′	**54°**
	Cos	Sen	Cotg	Tg	Cos	Sen	Cotg	Tg		

Angoli	Valori delle funzioni				Logaritmi delle funzioni				Angoli	
	Sen	Cos	Tg	Cotg	Sen	Cos	Tg	Cotg		
36° 0′	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	$\bar{1}$,7692	$\bar{1}$,9080	$\bar{1}$,8613	0,1387	0′	54°
10′	5901	8073	7310	3680	7710	9070	8639	1361	50′	
20′	5925	8056	7355	3597	7727	9061	8666	1334	40′	
30′	5948	8039	7400	3514	7744	9052	8692	1308	30′	
40′	5972	8021	7445	3432	7761	9042	8718	1282	20′	
50′	5995	8004	7490	3351	7778	9033	8745	1255	10′	
37° 0′	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	$\bar{1}$,7795	$\bar{1}$,9023	$\bar{1}$,8771	0,1229	0′	53°
10′	6041	7969	7581	3190	7811	9014	8797	1203	50′	
20′	6065	7951	7627	3111	7828	9004	8824	1176	40′	
30′	6088	7934	7673	3032	7844	8995	8850	1150	30′	
40′	6111	7916	7720	2954	7861	8985	8876	1124	20′	
50′	6134	7898	7766	2876	7877	8975	8902	1098	10′	
38° 0′	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	$\bar{1}$,7893	$\bar{1}$,8695	$\bar{1}$,8928	0,1072	0′	52°
10′	6180	7862	7860	2723	7910	8955	8954	1046	50′	
20′	6202	7844	7907	2647	7926	8945	8980	1020	40′	
30′	6225	7826	7954	2572	7941	8935	9006	0994	30′	
40′	6248	7808	8002	2497	7957	8925	9032	0968	20′	
50′	6271	7790	8050	2423	7973	8915	9058	0942	10′	
39° 0′	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	$\bar{1}$,7989	$\bar{1}$,8905	$\bar{1}$,9084	0,0916	0′	51°
10′	6316	7753	8146	2276	8004	8895	9110	0890	50′	
20′	6338	7735	8195	2203	8020	8884	9135	0865	40′	
30′	6361	7716	8243	2131	8035	8874	9161	0839	30′	
40′	6383	7698	8292	2059	8050	8864	9187	0813	20′	
50′	6406	7679	8342	1988	8066	8853	9212	0788	10′	
40° 0′	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	$\bar{1}$,8081	$\bar{1}$,8843	$\bar{1}$,9238	0,0762	0′	50°
10′	6450	7642	8441	1847	8096	8832	9264	0736	50′	
20′	6472	7623	8491	1778	8111	8821	9289	0711	40′	49°
	Cos	Sen	Cotg	Tg	Cos	Sen	Cotg	Tg		

Angoli	Valori delle funzioni				Logaritmi delle funzioni				Angoli	
	Sen	Cos	Tg	Cotg	Sen	Cos	Tg	Cotg		
40° 30′	0,6494	0,7604	0,8541	1,1708	$\bar{1}$,8125	$\bar{1}$,8810	$\bar{1}$,9315	0,0685	30′	
40′	6517	7585	8591	1640	8140	8800	9341	0659	20′	
50′	6539	7566	8642	1571	8155	8789	9366	0634	10′	
41° 0′	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	$\bar{1}$,8169	$\bar{1}$,8778	$\bar{1}$,9392	0,0608	0′	49°
10′	6583	7528	8744	1436	8184	8767	9417	0583	50′	
20′	6604	7509	8796	1369	8198	8756	9443	0557	40′	
30′	6626	7490	8847	1303	8213	8745	9468	0532	30′	
40′	6648	7470	8899	1237	8227	8733	9494	0506	20′	
50′	6670	7451	8952	1171	8241	8722	9519	0481	10′	
42° 0′	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	$\bar{1}$,8255	$\bar{1}$,8711	$\bar{1}$,9544	0,0456	0′	48°
10′	6713	7412	9057	1041	8269	8700	9570	0430	50′	
20′	6734	7392	9110	0977	8283	8688	9595	0405	40′	
30′	6756	7373	9163	0913	8297	8676	9621	0379	30′	
40′	6777	7353	9217	0850	8311	8665	9646	0354	20′	
50′	6799	7333	9271	0786	8324	8653	9671	0329	10′	
43° 0′	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	$\bar{1}$,8338	$\bar{1}$,8641	$\bar{1}$,9697	0,0303	0′	47°
10′	6841	7294	9380	0661	8351	8629	9722	0278	50′	
20′	6862	7274	9435	0599	8365	8618	9747	0253	40′	
30′	6884	7254	9490	0538	8378	8606	9773	0228	30′	
40′	6905	7234	9545	0477	8391	8594	9798	0202	20′	
50′	6926	7214	9601	0416	8405	8582	9823	0177	10′	
44° 0′	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	$\bar{1}$,8418	$\bar{1}$,8569	$\bar{1}$,9848	0,0152	0′	46°
10′	6967	7173	9713	0295	8431	8557	9874	0126	50′	
20′	6988	7153	9770	0235	8444	8545	9899	0101	40′	
30′	7009	7133	9827	0176	8457	8532	9924	0076	30′	
40′	7030	7112	9884	0117	8469	8520	9949	0051	20′	
50′	7050	7092	9942	0058	8482	8507	9975	0025	10′	
45° 0′	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	$\bar{1}$,8495	$\bar{1}$,8495	0,0000	0,0000	0′	45°
	Cos	Sen	Cotg	Tg	Cos	Sen	Cotg	Tg		

25. — Nelle tavole qui riportate le 10 colonne successive di ogni pagina saranno indicate e distinte con i corrispondenti numeri *ordinativi*, procedendo da *sinistra* a *destra*.

Gli angoli da 0° a 45° sono segnati nella 1ª colonna, e procedono in ordine crescente dall'*alto* in *basso*. Per questi angoli i valori delle funzioni trigonometriche e dei loro logaritmi si leggono sulla *linea* dell'angolo, e in corrispondenza della colonna *intestata in alto*.

Così, per es., volendosi *sen* 32° 20′, si *scende* lungo la 2ª colonna (pag. 35) e sulla linea dell'angolo si trova 0,5348.

Per avere *log tg* 28° 40′, si *scende* lungo la 8ª colonna (pag. 34) e sulla linea dell'angolo si trova $\overline{1}$,7378.

Gli angoli da 45° a 90° sono segnati nella 10ª colonna, procedono in ordine crescente dal *basso* in *alto*. Per questi angoli i valori delle funzioni e dei loro logaritmi si leggono sulla linea dell'angolo, e in corrispondenza della colonna *intestata in basso*.

Così, per es., per trovare *cotg* 49° si *sale* lungo la 4ª colonna (pagina 37) e sulla linea di 49° si legge 0,8693.

Similmente per avere *log cos* 84° 20′ si *sale* lungo la 6ª colonna (pag. 29) e sulla linea dell'angolo si trova $\overline{1}$,9945.

Inversamente, al valore di una funzione intestata in *alto* corrisponde, sulla stessa linea, l'angolo della 1ª colonna; al valore di una funzione intestata in *basso*, corrisponde l'angolo della 10ª colonna. — Lo stesso dicasi per i logaritmi delle medesime funzioni.

Es. — *Scendendo* lungo la 3ª colonna (pag. 32), nell'*ottava* riga si trova 0,9446, che è il coseno di 19°10′; lo stesso numero 0,9446 si ritrova *risalendo* lungo la stessa colonna, ma in tal caso rappresenta *sen* 70°50′. — I due angoli 19°10′ e 70°50′, situati sulla stessa riga, sono complementari, e però il seno dell'uno è eguale al coseno dell'altro.

Similmente, $\overline{1}$,6882 (pag. 33, 8ª colonna) è *log tg* 26°, ovvero *log cotg* 64°.

26. — Si chiama *differenza tavolare* (abbreviatamente D) il valore assoluto della differenza tra il numero segnato in una

riga e quello della riga successiva nella stessa colonna. — Per le colonne degli angoli questa differenza, nelle nostre tavole, è sempre 10.

Diremo *differenza tavolare relativa a un numero non segnato* in una colonna la **D** dei numeri tra i quali è compreso il numero dato.

Diremo *eccesso* (abbreviatamente **E**) di un numero non segnato in una colonna, la differenza tra questo numero e quello *immediatamente* minore segnato in essa).

Diremo *variazione* (abbreviatamente **V**) di una funzione (o di un angolo) l'aumento o la diminuzione che subisce la funzione (o l'angolo) per effetto dell'eccesso dell'angolo (o della funzione). — Così, per es., passando da *sen* 32° a *sen* 32°18′ si deve avere un *aumento* corrispondente all'eccesso di 18′; passando da *cos* 45° a *cos* 46°20′ si deve avere una *diminuzione* (1) corrispondente all'eccesso di 1°20′.

27. — Passiamo ora a risolvere il quesito:

Dato un angolo acuto, trovare il valore, o il logaritmo, di una delle sue quattro funzioni (sen, cos, tg, cotg).

1° — Se l'angolo dato è segnato nella tavola abbiamo già detto (n. 25), come si legga subito il valore della funzione, o del suo logaritmo.

2° — Se l'angolo dato non è segnato nella tavola, sarà *compreso* tra due angoli consecutivi di essa; e allora anche il valore della funzione sarà *compreso* tra i due valori di essa, corrispondenti ai due angoli. A questi due valori corrisponde una differenza tavolare determinata.

Ciò posto, per avere il valore della funzione si applica il metodo di *interpolazione*, già spiegato nella pratica dei logaritmi. Basta per questo calcolare la variazione **V** della funzione:

---

(1) È chiaro che per angoli acuti il valore del seno o della tangente *aumenta* con l'aumentare dell'angolo, e il valore del coseno o della cotangente *diminuisce* con l'aumentare dell'angolo; e inversamente.

Questa variazione si ha moltiplicando la D *della funzione per il rapporto tra l'eccesso* E *dell'angolo e la differenza tavolare degli angoli, che nelle nostre tavole è sempre 10. Si ha cioè:*

$$V = D \times \frac{E}{10}.$$

Facciamo qualche esempio:

1°. — *Vogliasi il seno dell'angolo* 25° 48′.

Dalla tavola, tenendo conto dei due angoli consecutivi 25° 40′ e 25° 50′, si ricava:

$$E = 48 - 40 = 8\,; \quad sen\ 25°\,40' = 0{,}4331\,; \quad D = 27.$$

La variazione da *aggiungere* al valore di *sen* 25° 40′ per ottenere il valore di *sen* 25° 48′ sarà:

$$V = 27 \times \frac{8}{10} = 21{,}6 \quad \text{(si porrà 22)}$$

e quindi avremo:

$$\begin{aligned} \text{sen } 25°\,40' &= 0{,}4331 \\ V &= \quad\ 22 \\ \hline \text{sen } 25°\,48' &= 0{,}4353. \end{aligned}$$

2°. — *Vogliasi la tangente dell'angolo* 47° 53′ 45″.

Qui avvertiamo che le suddivisioni del minuto primo devono essere valutate in parti decimali del primo; quindi avremo:

$$E = 3{,}75\,; \qquad tg\ 47°\,50' = 1{,}1041\,; \qquad D = 65\,;$$

$$V = 65 \times \frac{3{,}75}{10} = 24{,}375 \quad \text{(si porrà 24).}$$

Aggiungendo la variazione V a tg 47° 50′, si avrà tg 47° 53′ 45″:

$$\begin{aligned} tg\ 47°\,50' &= 1{,}1041 \\ V &= \quad\ 24 \\ \hline tg\ 47°\,53'\,45'' &= 1{,}1065. \end{aligned}$$

3°. — *Vogliasi* log cos 30° 36′.

Porremo senz'altro, valendoci dei dati forniti dalla Tavola,

$$D = 7; \quad E = 6; \quad V = 7 \times \frac{6}{10} = 4{,}2 \quad \text{(si porrà 4)};$$

e però, *togliendo* la variazione al valore di log cos 30° 30′, si avrà:

$$\log \cos 30° 30' = \bar{1}{,}9353$$
$$V = \quad 4$$
$$\log \cos 30° 36' = \bar{1}{,}9349.$$

28. — *Dato il valore di una funzione trigonometrica, o del suo logaritmo, trovare l'angolo corrispondente.*

Se il valore della funzione, o del suo logaritmo, si trova nella tavola, abbiamo già detto (n. 25) come si legga subito l'angolo corrispondente.

Daremo invece qualche esempio per valori della funzione che non figurano nella tavola, il che avviene nella maggior parte dei casi.

Naturalmente il valore assegnato per un *seno* o per un *coseno* deve essere compreso tra 0 e 1; e il relativo logaritmo deve essere negativo. — Il valore assegnato per una *tangente* o una *cotangente* può essere un numero positivo qualunque; e per il logaritmo relativo può assegnarsi un numero positivo o negativo qualunque.

Per applicare l'interpolazione si deve calcolare la variazione dell'angolo.

Questa variazione si ha, moltiplicando la differenza tavolare degli angoli (10′) *per il rapporto dell'eccesso* E *alla* D *della funzione data.*

Es.

1°. — *Trovare l'angolo il cui seno è* $\frac{3}{4}$. (Ciò corrisponde a porre sen $x = \frac{3}{4}$).

Per avere l'angolo x, cerchiamo nelle tavole e nella colonna dei seni due valori consecutivi, che comprendano il numero $\frac{3}{4} = 0{,}7500$.

Si ha così, leggendo dal *basso* in *alto* (pag. 37)

$$0{,}7490 = \text{sen } 48^\circ 30' \,; \quad D = 19 \,; \quad E = 7500 - 7490 = 10.$$

La variazione dell'angolo, da *aggiungersi* a $48^\circ 30'$, sarà:

$$V = 10' \times \frac{10}{19} = 5',2..... \quad \text{(si porrà } 5'12''),$$

quindi:

$$x = 48^\circ 30' + 5'12'' = 48^\circ 35' 12''.$$

2°. — *Trovare l'angolo il cui coseno è* 0,8590; cioè:

$$\cos x = 0{,}8590.$$

Dalle Tavole si ricava:

$$0{,}8587 = \cos 30^\circ 50' \,; \quad D = 15 \,; \quad E = 8590 - 8587 = 3 \,;$$

quindi la variazione da *togliere* all'angolo $30^\circ 50'$, sarà:

$$V = 10' \times \frac{3}{15} = 2',$$

e così avremo:

$$x = 30^\circ 50' - 2' = 30^\circ 48'.$$

3°. — *Trovare l'angolo la cui tangente ha per logaritmo* 0,1890; cioè:

$$\log \text{tg } x = 0{,}1890.$$

Valendoci delle Tavole (pag. 35, colonna 9ª) troviamo, leggendo dal *basso* in *alto*,

$$0{,}1875 = \text{tg } 57^\circ \,; \quad D = 28 \,; \quad E = 1890 - 1875 = 15.$$

La variazione da *aggiungere* sarà:

$$V = 10' \times \frac{15}{28} = 5',3..... \quad \text{(si porrà } 5'20''),$$

e quindi risulta:

$$x = 57^\circ 5' 20''.$$

Osservazione — Per il seno e la tangente di angoli molto pic-

coli (inferiori ai 4°), la regola d'interpolazione qui applicata non vale più. Lo stesso dicasi per il coseno e la cotangente di angoli prossimi a 90°.

Per questo caso si hanno Tavole supplementari, che però qui non abbiamo riportato.

§ 13. — Risoluzione dei triangoli rettangoli.

29. — A quello stesso modo che sappiamo costruire il triangolo, quando siano dati i tre elementi necessari e sufficienti a determinarlo, possiamo dai *valori* di questi elementi calcolare i valori degli altri tre? Questo problema, e ogni altro che da esso dipenda, si risolve applicando convenientemente le funzioni trigonometriche. Di qui il nome di *trigonometria* a questa parte speciale della matematica.

Risolvere un triangolo vuol dire calcolare i valori dei suoi elementi incogniti, conoscendo i valori degli altri, che servono a determinarlo.

30. — Limitandoci per ora al triangolo rettangolo, cominciamo a stabilire le relazioni fondamentali tra i suoi elementi.

Nel triangolo rettangolo ABC (fig. 8) sia $\widehat{C}$ l'angolo retto, $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ gli angoli acuti, e si indichino con a, b, c i valori rispettivi dei cateti e dell'ipotenusa.

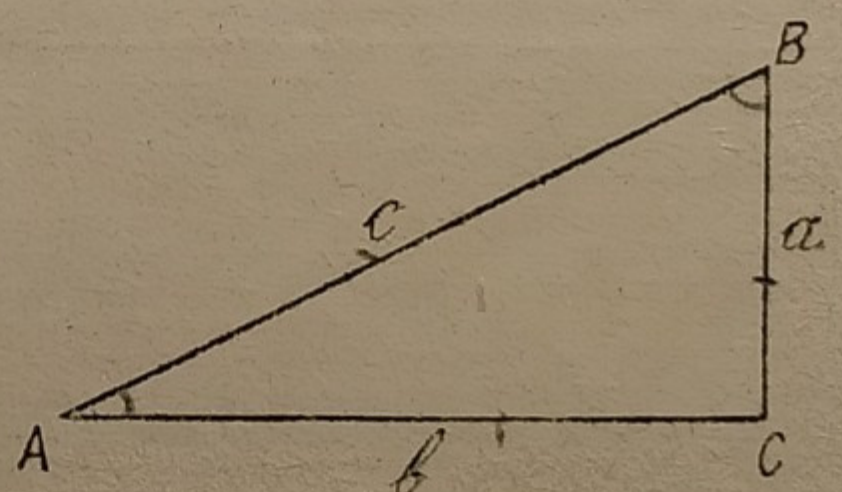


Fig. 8.

Ciò posto si ha:

Relazione tra gli angoli. — L'angolo $\widehat{C}$ è retto e quindi noto. Gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ sono *complementari*, cioè:

$$\widehat{A}+\widehat{B}=90^\circ, \tag{1}$$

e però, noto uno di essi, è noto anche l'altro. Dunque degli angoli di un triangolo rettangolo basta conoscere un angolo acuto.

Relazione tra i lati. — La relazione tra i lati è quella data dal teorema di Pitagora, cioè:

$$c^2 = a^2 + b^2 ; \tag{2}$$

e così, noti due lati, si calcola il terzo.

Relazioni tra i lati e le funzioni trigonometriche di un angolo acuto. — Prendendo, per es., a considerare l'angolo $\widehat{A}$, abbiamo (v. anche § 6):

$$\text{sen}\,\widehat{A} = \frac{a}{c} ; \quad \cos\widehat{A} = \frac{b}{c} ; \quad \text{tg}\,\widehat{A} = \frac{a}{b} ; \quad \text{cotg}\,\widehat{A} = \frac{b}{a} . \tag{3}$$

Per mezzo di queste, dati due elementi si determina il terzo. In particolare, conoscendo due lati, si può avere una funzione di un angolo acuto, e quindi, per mezzo delle tavole, l'angolo stesso.

Le (1), (2), (3) si dicono *formule di risoluzione* per i triangoli rettangoli.

31. — Problema 1°. — *Risolvere il triangolo rettangolo, dati l'ipotenusa e un cateto.*

Essendo noti l'ipotenusa c e il cateto a (fig. 8), dalla prima delle relazioni (3) si ha:

$$\text{sen}\,\widehat{A} = \frac{a}{c} ,$$

e così potremo calcolare l'angolo $\widehat{A}$, e quindi anche l'angolo $\widehat{B} = 90° - \widehat{A}$.

Il cateto incognito b si può avere dalla relazione (2):

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} ;$$

ovvero, dopo conosciuto $\widehat{A}$, da una delle (3), per es. dall'ultima:

$$b = a\,\text{cotg}\,\widehat{A} .$$

(Questa seconda formula sarà preferibile, se il calcolo della prima dovesse riuscire troppo lungo).

Es.

Essendo $a = 5$ e $c = 13$, calcolare $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, b.
Sostituendo nelle *formule risolutive* precedenti, abbiamo:

$$\text{sen } \widehat{A} = \frac{5}{13} = 0{,}3846.$$

Nelle tavole trigonometriche si trova:

$$0{,}3827 = \text{sen } 22^\circ 30' ; \qquad D = 27 ; \qquad E = 19 ;$$

applicando l'interpolazione risulta:

$$\widehat{A} = 22^\circ 37' ; \quad \text{e quindi} \quad \widehat{B} = 90^\circ - 22^\circ 37' = 67^\circ 23'.$$

Per il calcolo di b si ha:

$$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12.$$

E così il triangolo è risoluto.

32. — Problema 2°. — *Risolvere il triangolo rettangolo, dati l'ipotenusa e un angolo acuto.*

Siano dati l'ipotenusa c e l'angolo acuto $\widehat{B}$ (fig. 8). Intanto avremo:

$$\widehat{A} = 90^\circ - \widehat{B};$$

e per i due cateti a e b si ricavano le formule risolutive:

$$a = c \cos \widehat{B}; \qquad b = c \text{ sen } \widehat{B}.$$

Es.

Essendo $c = 225$ e $\widehat{B} = 58^\circ 40'$, calcolare $\widehat{A}$, a, b.
Si trova subito:

$$\widehat{A} = 90^\circ - 58^\circ 40' = 31^\circ 20' ;$$

$$a = 225 \cos 58^\circ 40' = 225 \times 0{,}52 = 117 ;$$

$$b = 225 \text{ sen } 58^\circ 40' = 225 \times 0{,}8542 = 192{,}195.$$

33. — Problema 3°. — *Risolvere il triangolo rettangolo dati i due cateti.*

Essendo a e b i due cateti, dalla formula

$$\text{tg}\,\widehat{A} = \frac{a}{b}$$

si ricava $\widehat{A}$ e quindi $\widehat{B}$.

Per l'ipotenusa c si ha:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

ovvero, applicando la prima delle (3)

$$c = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}}.$$

Es.

Essendo $a = 358{,}25$ e $b = 562{,}5$ calcolare $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, c.

In questo caso torna più spedito servirsi del calcolo logaritmico.

Dalle formule risolutive

$$\text{tg}\,\widehat{A} = \frac{a}{b}; \qquad c = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}},$$

si ricava:

$$\log \text{tg}\,\widehat{A} = \log 358{,}25 - \log 562{,}5; \quad \log c = \log 358{,}25 - \log \text{sen}\,\widehat{A}.$$

Passiamo a calcolare $\widehat{A}$:

$$\begin{aligned} \log 358{,}25 &= 2{,}5542 \\ \log 562{,}5 &= \underline{2{,}7501} \\ \log \text{tg}\,\widehat{A} &= \bar{1}{,}8041 \end{aligned}$$

Dalle Tavole (pag. 35, 8ª colonna) si ricava:

$$\bar{1}{,}8014 = \log \text{tg}\, 32°20'; \quad \text{D} = 28; \quad \text{E} = 27;$$

quindi applicando l'interpolazione risulta:

$$\widehat{A} = 32°29'38''; \quad \text{e però} \quad \widehat{B} = 57°30'22''.$$

Per il calcolo di c, sostituendo ad $\widehat{A}$ il valore trovato, abbiamo:

$$\log 358{,}25 = 2{,}5542$$

$$\log \operatorname{sen} 32^\circ 29' 38'' = \overline{1}{,}7301$$

$$\log c = 2{,}8241$$

quindi:

$$c = \text{ant.log } 2{,}8241 = 667.$$

34. — **Problema 4°.** — *Risolvere un triangolo rettangolo, dati un cateto e un angolo acuto.*

Osserviamo che, dati un cateto e un angolo, un triangolo rettangolo non è completamente determinato, finchè non si sappia la posizione relativa del cateto e dell'angolo.

Si presentano dunque due casi, secondo che il cateto sia opposto o adiacente all'angolo.

1° caso. — Essendo a il cateto e $\widehat{A}$ l'angolo opposto (fig. 8), dalle (1), (2), (3) del n. 30 si hanno le formule risolutive:

$$\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{A};$$

$$b = a \operatorname{cotg} \widehat{A}; \qquad c = \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Es.

Dati $a = 125$; $\widehat{A} = 30^\circ 20'$, calcolare $\widehat{B}$, b, c.

Sostituendo, abbiamo:

$$\widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ 20' = 59^\circ 40';$$

$$b = 125 \operatorname{cotg} 30^\circ 20' = 125 \times 1{,}709 = 213{,}625.$$

Per il calcolo di c, non volendo applicare il teorema di Pitagora, si ha:

$$\log 125 = 2{,}0969$$

$$\log \operatorname{sen} 30^\circ 20' = \overline{1}{,}7033$$

$$\log c = 2{,}3936$$

quindi:

$$c = \text{ant. log } 2{,}3936 = 247{,}53.$$

2° caso. — Essendo dati il cateto a e l'angolo adiacente $\widehat{B}$, si trova subito $\widehat{A}$, e così torniamo al 1° caso.

Es.

Riprendiamo l'esempio precedente per verificare le differenze dei risultati che si ottengono, pure assumendo per i dati i medesimi valori.

$$\widehat{A} = 90° - 30°20' = 59°40';$$

$$b = 125 \operatorname{cotg} 59°40' = 125 \times 0{,}5851 = 73{,}137.$$

Per il calcolo di c si ha:

$$\log c = 125 - \log \operatorname{sen} 59°40';$$

ora

$$\log 125 = 2{,}0969$$

$$\log \operatorname{sen} 59°40' = \overline{1}{,}9361$$

$$\log c = 2{,}1608$$

quindi:

$$c = \text{ant. log } 2{,}1608 = 144{,}83.$$

ESERCIZI

1. — Se x è un angolo acuto, verificare che

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{1}{3} + 0{,}5\right) \operatorname{sen} x < \frac{19}{12};$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) \cos^2 x < 5{,}4;$$

$$\frac{3}{4} \operatorname{sen} x + \frac{7}{9} \cos^2 x < \frac{14}{19}.$$

2. — Trovare *graficamente* dei valori approssimati del *seno*, del *coseno* e della *tangente* di 22°30'. (*Si costruisca un angolo eguale a mezzo retto; da un punto qualunque di uno dei lati si conduca la*

normale all'altro lato; si fissi l'unità di misura dei segmenti, quindi una **scala**. *Si misurino i lati del triangolo ottenuto.....*).

3. — Dimostrare che se un segmento non è normale nè parallelo ad una retta, la sua proiezione su questa è eguale al prodotto del segmento per il coseno dell'angolo (acuto) che la sua direzione forma con la retta.

4. — Un segmento lungo 20 *cm* si proietta su di una retta che forma con essa un angolo di 18°. Qual'è la lunghezza della proiezione?

5. — Ammesso che l'*indice di rifrazione* di due mezzi sia eguale a $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, qual è l'angolo di rifrazione, allorchè quello di incidenza è di 30°?

6. — Essendo x un angolo acuto, calcolare $sen\, x$, sapendo che

$$(3 \operatorname{sen} x - 1)(2 \operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x + 2) = 0.$$

7. — Dimostrare che se un angolo acuto cresce, il suo seno e la sua tangente crescono, ma il suo coseno diminuisce.

8. — Calcolare l'angolo acuto x sapendo che

$$\operatorname{sen} x = \cos x.$$

9. — Se x è un angolo acuto, dimostrare che

$$\operatorname{sen} x < \operatorname{tg} x.$$

10. — Dimostrare che se in un triangolo ABC, l'angolo A è acuto, si ha:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = 2R.$$

Applicando questa relazione, esprimere il valore di R in funzione di a, nei casi in cui $\widehat{A}$ sia uno degli angoli 30°, 45°, 60°.

11. — Dimostrare che in ogni triangolo si ha:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

12. — Dimostrare che in ogni triangolo si ha:

$$r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\widehat{A} = (p-b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\widehat{B} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\widehat{C}.$$

(Dedurre che se $\widehat{A}$ è retto, si ha $r = p - a$).

13. — Dimostrare che i seni di due angoli acuti di un triangolo stanno tra loro come i lati opposti.

14. — Se α è l'angolo di due delle diagonali di un cubo, si ha:

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{6}.$$

15. — Dimostrare che se $\widehat{B}$ è un angolo acuto di un triangolo, e S è l'area di esso, si ha:

$$S = \frac{1}{2}\,ac\,\text{sen}\,\widehat{B}.$$

(*Casi particolari:* $\widehat{B} = 30°,\ 45°,\ 60°$).

16. — Essendo x un angolo acuto, calcolare $\text{sen}\,x$ e $\cos x$, sapendo che

$$\text{sen}\,x + \cos x = a,$$

dove a è un numero dato.

Discussione. (Con l'equazione $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, *si ha un sistema di 2° grado rispetto a* $\text{sen}\,x$ *e* $\cos x$, *che può essere subito ridotto alla determinazione di due numeri di cui si conoscono somma e prodotto).*

17. — Calcolare le funzioni trigonometriche degli angoli acuti di un triangolo rettangolo, sapendo che l'ipotenusa è di 10 *cm*, mentre la somma dei cateti è di 18 *cm*.

18. — La *risultante* di due forze ad angolo retto è di 15 *kg*, e la sua direzione forma un angolo di 30° con quella di una delle componenti. Calcolare le intensità delle due componenti.

19. — Se l_n, a_n sono rispettivamente il lato e l'apotema di un poligono regolare di n lati, dimostrare che

$$a_n = \frac{1}{2}\,l_n \,.\, \text{tg}\,\frac{(n-2)\,.\,90°}{n}.$$

(*Casi particolari:* $n = 3,\ 4,\ 6,\ 10$).

20. — Calcolare il *seno* e la *tangente* di un angolo acuto, sapendo che il *coseno* dello stesso angolo è eguale ad una delle soluzioni dell'equazione:

$$2x^2 + 9x - 5 = 0.$$

21. — In un triangolo isoscele la base è di *cm* 7,8 e il perimetro è di *cm* 25,4. Calcolare l'angolo al vertice.

22. — In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è di 85° 14′, e l'altezza è di *cm* 8,6. Si calcolino i lati del triangolo.

23. — Qual'è la lunghezza della corda sottesa ad un arco di 42° 18′ in un cerchio di raggio di *cm* 15,8 ?

24. — Una corda di un cerchio è di *cm* 12,4 e l'angolo al centro corrispondente è di 35° 40′ 20″. Si domanda la lunghezza dell'arco che sottende quella corda.

25. — Una corda di un cerchio è i $\frac{2}{5}$ del raggio. Qual è l'angolo al centro corrispondente?

26. — Qual'è l'area di un poligono regolare di 18 lati inscritto in un cerchio di raggio *m* 0,84?

27. — Due lati consecutivi di un parallelogrammo sono di *cm* 18, e *cm* 24, e l'angolo compreso è di 38° 12′. Qual'è l'area del parallelogrammo ?

28. — Calcolare l'area della parte di un cerchio compresa tra un arco e la corda sottesa, sapendo che l'arco è di 29° e che il raggio del cerchio è di 20 *cm*.

29. — Calcolare l'area della parte di un cerchio compresa tra due corde parallele che sono sottese l'una da un arco di 85° e l'altra da un arco di 38° *(Si supporrà che il centro non sia situato sulla striscia determinata dalle due corde parallele)*.

30. — Spiegate che se x è un angolo acuto qualunque, si ha:

$$\log \operatorname{sen} x = \log \operatorname{tg} x + \log \cos x.$$

31. — Esprimere in funzione del lato l di un cono e dell'angolo α che esso forma con l'altezza, l'area laterale e il volume del cono.

32. — Un segmento lungo 40 *cm* si proietta su di una retta che forma con la direzione del segmento un angolo di 37°; poi la proiezione si proietta su di un piano che forma con quella retta un angolo di 41° 20′. Qual'è la lunghezza della proiezione ottenuta sul piano ?

33. — Un *piano inclinato* è lungo 10 *m*. Trovare il tempo impiegato da un mobile a percorrerlo, e la velocità acquistata alla fine della discesa. (*Inclinazione* del piano = 35° 12′; $g = 9{,}8$).

34. — Un corpo è lanciato su per un *piano inclinato* che fa un angolo di 30° coll'orizzonte. La sua velocità iniziale è 5 *m*. Si domanda quando sarà distante 9 *m* dal punto di partenza.

35. — Un raggio di luce cade con un'incidenza di 30° sopra una lastra di vetro a facce parallele il cui indice di rifrazione è $\frac{3}{2}$, e lo spessore *m* 0,2. Calcolare la distanza tra il raggio incidente ed il prolungamento dell'emergente.

36. — Trovare per quale incidenza avrà luogo la riflessione totale di un raggio luminoso che passa dal cristallo nell'acqua, sapendo che i due rispettivi indici assoluti di rifrazione sono 1,60 ed 1,336.

37. — Un raggio luminoso passa dal vuoto nell'acqua. Calcolare il massimo dell'angolo di rifrazione, sapendo che l'indice assoluto dell'acqua è 1,336 (1).

---

38. — Calcolare:

sen 24°35′	cos 35°42′	tg 27°15′
sen 65°47′	cos 73°12′	tg 59°17′
log sen 74°13′	log cos 57°18′	log tg 47°34′
log sen 22°48′	log cos 24°18′	log tg 29°19′

39. — Calcolare gli angoli acuti x, y, z sapendo:

1°. $\operatorname{sen} x = 0{,}5128$; $\cos y = 0{,}7194$;

$\operatorname{tg} z = 1{,}2456$;

2°. $\log \operatorname{sen} x = \bar{1}{,}8574$; $\log \cos y = \bar{1}{,}2893$;

$\log \operatorname{tg} z = 0{,}5976$.

40. — Calcolare per mezzo dei logaritmi il prodotto:

$$15{,}76 \times \operatorname{sen} 19°25' \times \cos 49°17' \times \operatorname{tg} 48°16'.$$

---

(1) I problemi 33, ... 37 sono tratti dal vol. del prof. F. Cintolesi (*Problemi di Fisica*. Livorno, Giusti).

41. — Risolvere il triangolo rettangolo ABC ($\widehat{A} = 90°$) essendo dati:

1°.	$a = 324{,}56$	$\widehat{B} = 52°\,24'$;
2°.	$a = 128{,}13$	$b = 96{,}45$;
3°.	$b = 34{,}52$	$\widehat{B} = 38°\,28'$;
4°.	$b = 34{,}52$	$\widehat{C} = 38°\,28'$;
5°.	$b = 816{,}24$	$c = 642{,}32$.

42. — Risolvere il triangolo rettangolo ABC ($\widehat{A} = 90°$) essendo dati:

1°.	$(b + c) = 584$	$\widehat{B} = 34°\,46'$;
2°.	$(b - c) = 63$	$\widehat{B} = 56°\,30'$;
3°.	$b \,.\, c = 1924$	$\widehat{B} = 40°\,50'$.

(Si dia un cenno di risoluzione geometrica per ciascuno di questi casi).

PARTE II

Funzioni trigonometriche di angoli quali si vogliano.

Risoluzione dei triangoli in generale.

Segmenti e angoli relativi.

Coordinate dei punti del piano.

35. — Anche limitandoci, come abbiamo fatto fin qui, alla considerazione delle funzioni trigonometriche degli angoli acuti, potremmo risolvere il *problema trigonometrico* per triangoli quali si vogliano.

Per es., si conoscano i due lati a, b del triangolo ABC (fig. 9) e l'angolo compreso ACB, che *supporremo ottuso*.

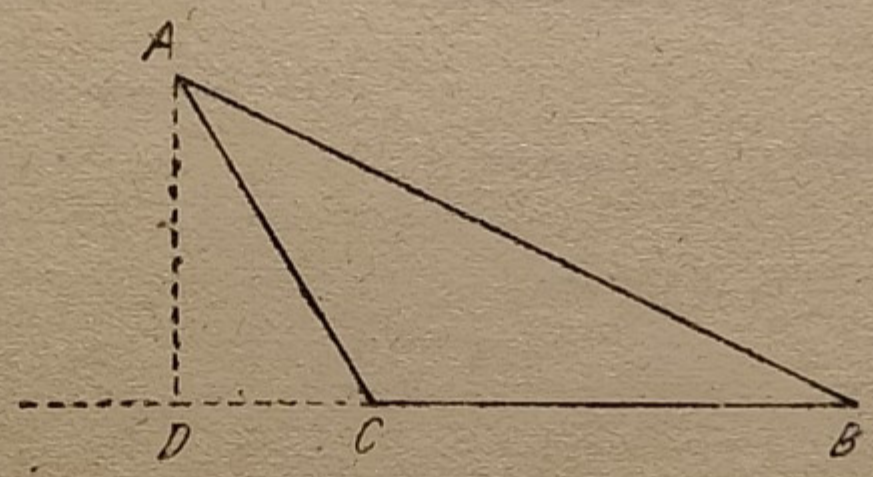


Fig. 9.

Condotta l'altezza AD, si può risolvere il triangolo rettangolo ADC, perchè se ne conosce l'ipotenusa e l'angolo acuto ACD. Ciò fatto si può risolvere il triangolo rettangolo ADB, perchè se ne conoscono i due cateti AD e $DB = a + CD$. Allora il lato c, l'angolo $\widehat{B}$, e quindi l'angolo CAB sono noti; e così il triangolo ABC è completamente risoluto.

Ma, così facendo, saremmo costretti ogni tanto di distinguer casi; e i calcoli da farsi sarebbero spesso troppo lunghi.

Mette conto quindi di *generalizzare* le definizioni di *sen*, di *cos* e di *tg*, estendendole ad angoli quali si vogliano.

Questo ci proponiamo di fare in ciò che segue.

Sappiamo che nello studio della Matematica e di altre Scienze si presenta spesso la necessità di tener conto dell'uno o dell'altro dei due sensi opposti che hanno alcune grandezze.

Diremo *grandezze assolute* quelle grandezze che si considerano soltanto nella loro estensione (intensità), senza aver riguardo al senso che possono avere; diremo *relative* quelle che vengono considerate non soltanto nella estensione (o intensità), ma anche nel senso in cui esse si volgono (1).

Chiameremo *positivo* uno qualunque dei due sensi che può avere una grandezza relativa; e *negativo* il senso opposto.

Diremo *valore* di una grandezza relativa il numero relativo che ha il segno + o il segno −, secondo che la grandezza ha il senso positivo o negativo, e che ha per modulo (valore assoluto) il valore di quella grandezza considerata come assoluta.

36. — Nello studio fatto fin qui abbiamo considerato *segmenti, archi* e *angoli assoluti*, cioè non abbiamo badato al senso in cui possono essere descritti. Ma un punto può descrivere un segmento, o un arco, in un senso o nel senso opposto; una semiretta, ruotando attorno all'origine, può descrivere un angolo in un senso o nell'opposto. Abbiamo quindi *segmenti, archi* e *angoli relativi*, i cui valori (quando sia fissato il senso positivo, e l'unità di misura per la loro grandezza assoluta) saranno numeri relativi.

Il segmento (o l'arco) relativo che ha per termini i punti A e B, considerato nel senso da A a B si indicherà con AB (*A origine, B estremo*); e il suo valore si indicherà con (AB).

37. — Ciò premesso, si fissino nel piano due rette $X'X$, $Y'Y$ (fig. 10) normali tra loro, che s'incontrino in O (*origine*); e su ciascuna di esse si fissi il senso positivo. Nella figura il senso positivo è indicato da una *freccia*. — Sulla retta $X'X$ il senso positivo è quello da *sinistra* a *destra* (da X' ad X); — sulla retta $Y'Y$ il senso positivo è quello dal *basso* all'*alto* (da Y' ad Y). — Si fissi inoltre un segmento (assoluto) u come unità di misura dei segmenti (assoluti).

---

(1) Numerosi esempi di grandezze relative si presentano specialmente agli alunni nella introduzione dei numeri relativi. Ci risparmiamo quindi di ripetere qui tali esempi.

Sia P un punto qualunque del piano, e le parallele agli assi condotti per P incontrino $X'X$, $Y'Y$ rispettivamente nei punti M, N. I valori dei segmenti relativi OM, ON si diranno *coordinate cartesiane* (1) *ortogonali* del punto P.

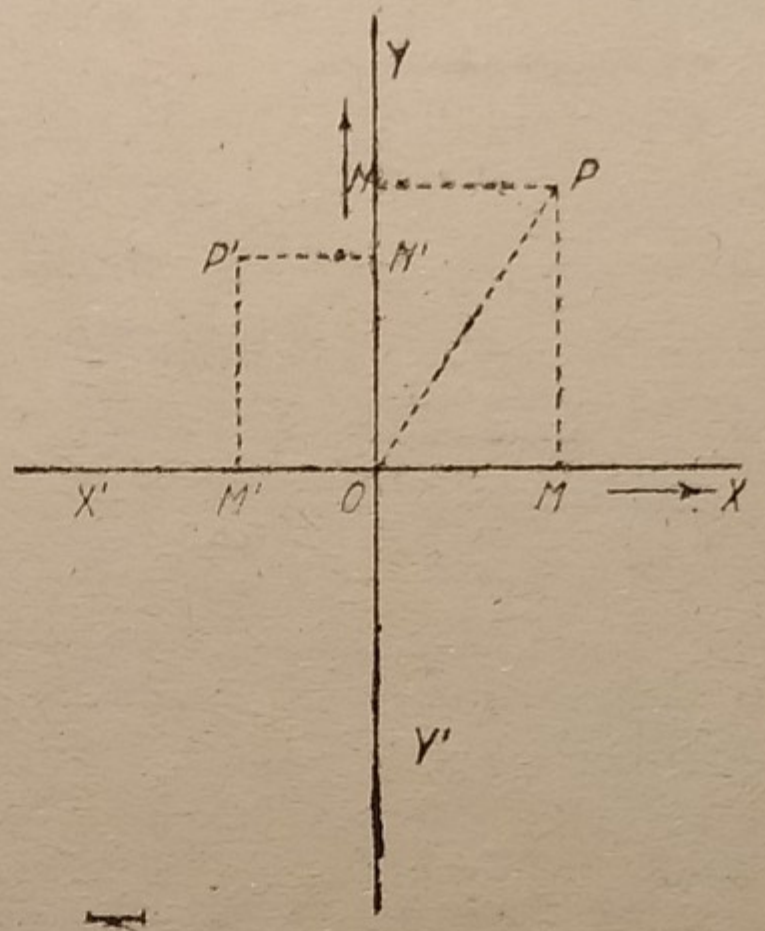


Fig. 10.

Se, per es.,

$(OM) = +3$; $(ON) = +4$,

le coordinate del punto P saranno 3 ; 4.

Se, per es.,

$(OM') = -2$; $(ON') = +3$,

le coordinate di P' sono -2 ; 3.

Così possiamo dire che ad ogni punto del piano corrisponde una coppia di numeri relativi: le *coordinate* del punto. — Queste coordinate si distinguono l'una dall'altra con nomi speciali. Si chiama *ascissa* del punto P (o del punto P', ec.) il valore del segmento OM (o OM', ec.) dell'asse $X'X$; — *ordinata* del punto P (o del punto P', ec.) il valore del segmento ON (o ON', ec.) dell'asse $Y'Y$.

La retta $X'X$ si dice *asse delle ascisse*; la retta $Y'Y$ *asse delle ordinate.*

Dati ordinatamente due numeri relativi, si può trovare un punto che abbia il primo numero per ascissa, l'altro per ordinata.

Possiamo dunque dire:

Tra i punti di un piano e le coppie di numeri relativi si può stabilire una corrispondenza biunivoca; — ad ogni punto del piano si può far corrispondere una coppia di numeri (ascissa e ordinata); — ad ogni coppia di numeri

---

(1) In onore di R. Descartes, matematico, fisico e filosofo francese (1596–1650).

relativi (ascissa e ordinata) si può far corrispondere un punto del piano.

Osservazione. — Notiamo che questa corrispondenza si può ottenere in infiniti modi. Per fissare *una* corrispondenza, cioè, come si suol dire, un *sistema di coordinate cartesiane ortogonali*, occorre fissare:

1° due rette ortogonali (gli assi delle coordinate) e il loro punto d'incontro come origine;

2° il senso positivo su ognuno degli assi;

3° il segmento unitario *u*.

Cambiando questi elementi, in tutto o in parte, cambia il sistema di coordinate.

38. — È importante osservare che i punti dell'asse $X'X$ hanno l'ordinata *nulla*; — che i punti dell'asse $Y'Y$ hanno l'ascissa nulla; — che i punti interni all'angolo $\widehat{XOY}$ hanno le coordinate tutt'e due positive; — i punti dell'angolo $\widehat{YOX'}$ hanno l'ascissa negativa e l'ordinata positiva; — quelli dell'angolo $\widehat{X'OY'}$ hanno le coordinate tutt'e due negative; — quelli dell'angolo $\widehat{Y'OX}$ hanno l'ascissa positiva e l'ordinata negativa; — che due punti simmetrici rispetto all'asse $X'X$ hanno ordinate *opposte*; — che due punti simmetrici rispetto all'asse $Y'Y$ hanno ascisse opposte; — che due punti simmetrici rispetto all'origine O hanno ascisse opposte e ordinate opposte.

39. — *Raggio vettore* di un punto P è il valore della sua distanza OP dall'origine. Il raggio vettore di un punto si considera sempre positivo.

La semiretta OX avente l'origine in O, ruotando intorno al punto O, può descrivere angoli in un senso o nel senso opposto; — e ogni punto di essa descrive nello stesso tempo un arco circolare. Converremo di assumere come senso positivo degli angoli descritti dalla semiretta OX, e degli archi descritti dai punti di essa, quello contrario al movimento degli indici dell'orologio, cioè il *senso antiorario*; e quindi come negativo il senso *orario*.

Generalmente gli angoli che considereremo avranno per origine la semiretta OX; e gli archi circolari avranno la loro origine sulla stessa semiretta.

In seguito a queste convenzioni l'angolo di 70° avrà l'estremo nella prima regione angolare $\widehat{XOY}$; — l'angolo di 120° nella regione $\widehat{YOX'}$; — l'angolo di 315° nella regione $\widehat{Y'OX}$; — l'angolo di 400° nella regione $\widehat{XOY}$; — l'angolo (— 130°) nella regione $\widehat{X'OY'}$; ec.

40. — Avremo spesso da considerare il rapporto dell'ordinata (o dell'ascissa) di un punto P al suo raggio vettore; o il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa. Manifestamente, per la proprietà dei triangoli simili, e per le convenzioni fatte sui segni delle coordinate, tali rapporti non variano se il punto P si muove sulla semiretta OP. Potremo quindi supporre che il raggio vettore del punto P sia eguale all'unità di misura, cioè che il punto P si trovi sulla circonferenza di centro O e raggio eguale all'unità di misura (che diremo *circonferenza trigonometrica*, e che supporremo fissata). Per ogni punto situato su questa circonferenza il rapporto dell'ordinata (o ascissa) al raggio vettore non sarà altro che l'ordinata (o l'ascissa) del punto stesso.

Indicheremo con A, B, C, D rispettivamente i punti d'incontro della circonferenza trigonometrica con i semi-assi OX, OY, OX', OY'.

Se la circonferenza trigonometrica è graduata da 0° a 360°, a partire da O, nel senso positivo, i punti B, C, D saranno gli estremi degli archi 90°, 180°, 270°.

Gli archi AB, BC, CD, DA saranno detti rispettivamente 1°, 2°, 3° e 4° *quadrante*: tale denominazione useremo per indicare le successive regioni angolari $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$.

41. — Osserviamo che se una semiretta OA descrive dapprima un angolo $\widehat{AOP} = \alpha$, positivo o negativo, e poi descrive ancora uno o più giri, essa ritorna alla posizione OP. Quindi gli angoli che hanno l'origine OA e l'estremo OP sono *infi-*

niti. Se α è l'ampiezza di uno di essi, tutti gli angoli che hanno la stessa origine e lo stesso estremo sono dati dalla formula:

$$\alpha + k \,.\, 360^\circ$$

dove k è un numero intero, positivo, o negativo, o nullo.

Le funzioni trigonometriche di angoli qualunque.

§ 1. — Seno di un angolo o di un arco, e sue variazioni.

42. — Sia $\widehat{AOP}$ (fig. 11) un angolo qualsivoglia (positivo o negativo) e P il punto d'incontro del lato OP con la circonferenza trigonometrica.

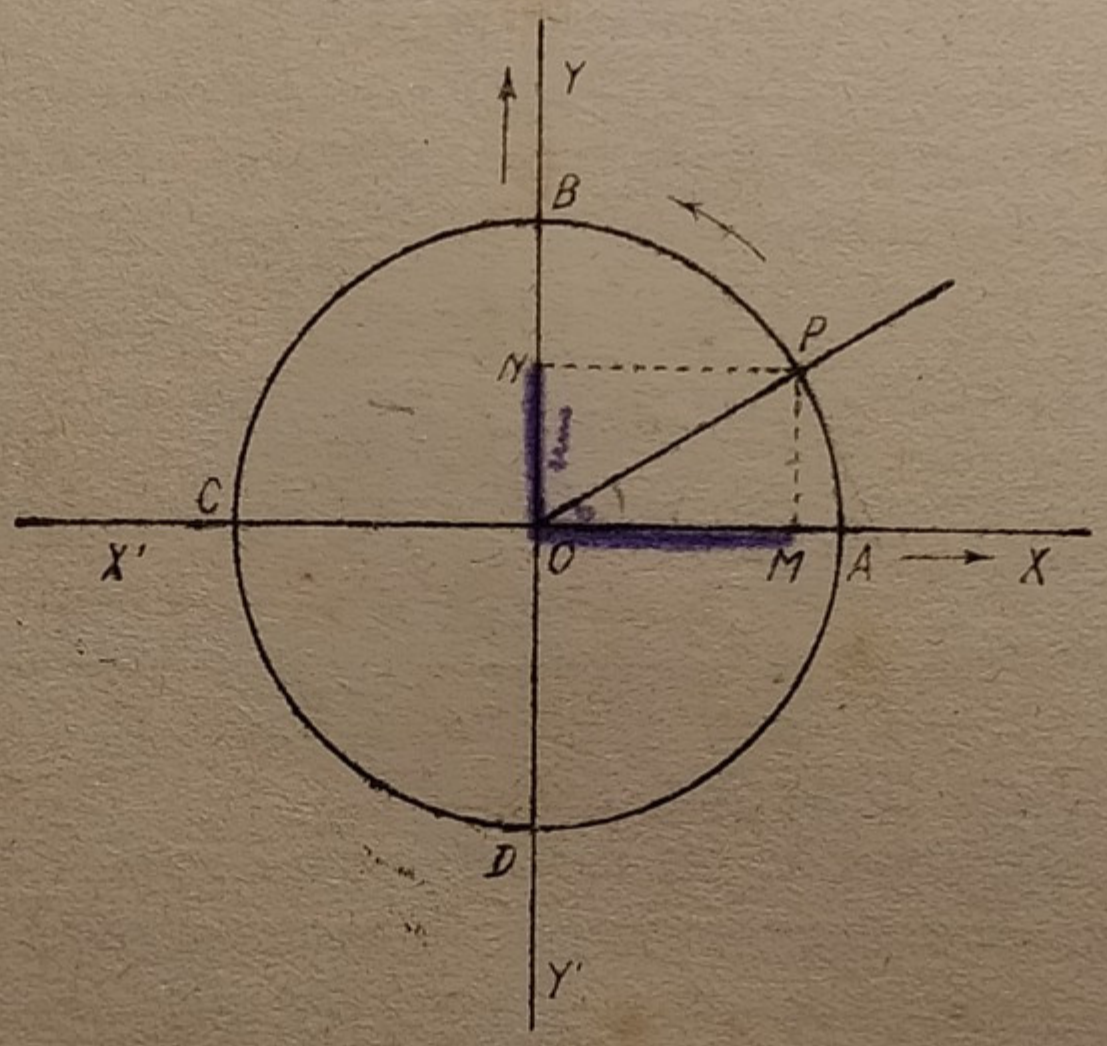


Fig. 11.

Df. — Chiameremo *seno dell'angolo* $\widehat{AOP}$ (o dell'arco AP, e di ogni arco simile ad AP) l'ordinata del punto P.

Se PM, PN sono le normali agli assi condotti dal punto P,

il seno dell'angolo $\widehat{AOP}$ non è che il valore del segmento relativo ON, o quello di MP (preso con lo stesso segno di ON).

Osserviamo subito che questa **Df** è una generalizzazione di quella che abbiamo dato per il seno di un angolo acuto. Invero, se $\widehat{AOP}$ è un angolo acuto, il seno di esso, secondo la vecchia **Df**, è il rapporto del cateto MP all'ipotenusa OP; cioè (essendo OP l'unità di misura) il valore di MP, come appunto diciamo con la nuova **Df**.

43. — **Variazioni del seno.** — Se l'angolo $\widehat{AOP}$ è nullo, il punto P coincide con A; e poichè i punti dell'asse $X'X$ hanno ordinata nulla, sarà:

$$\text{sen } 0^\circ = 0\,;$$

(il seno di un angolo nullo è 0).

Se l'angolo $\widehat{AOP}$ aumenta da 0° a 90°, il punto N va dal punto O al punto B; e poichè il valore di OB è $+1$, potremo dire che mentre l'angolo cresce da 0° a 90°, il seno cresce da *0* a *1* (passando per tutti i valori intermedi). Abbiamo pertanto:

$$\text{sen } 90^\circ = 1\,;$$

(il seno di un angolo retto è 1).

Mentre l'angolo aumenta da 90° a 180°, il punto P va da B a C; il punto N da B in O; il seno quindi diminuisce da 1 a 0:

$$\text{sen } 180^\circ = 0\,;$$

(il seno di un angolo piatto è nullo).

In modo analogo si vede che se l'angolo $\widehat{AOP}$ aumenta da 180° a 270°, cioè il punto P va da C a D, il punto N va da O a D; e quindi il seno diminuisce da *0* a -1:

$$\text{sen } 270^\circ = -1.$$

E si vede pur facilmente che se l'argomento aumenta da 270° a 360°, il seno aumenta da -1 a 0:

$$\text{sen } 360^\circ = 0.$$

Se l'angolo continua ancora a crescere da 360° a $2 \times 360°$, da $2 \times 360°$ a $3 \times 360°$, ec., il seno riprende gli stessi valori, nello stesso ordine.

In modo analogo si può trovare come varia il seno, allorchè l'argomento varia da 0° a $-360°$, da $-360°$ a $-2 \times 360°$; ec.

Riassumendo possiamo dire che il seno varia tra *1* e *— 1*; — che è capace di acquistare qualunque valore compreso tra questi limiti, e che, prescindendo dal segno, acquista tutti i valori di cui è capace, quando l'argomento varia da 0° a 90°.

Osservazione. — Le eguaglianze

$$\text{sen } x = 0{,}7 ; \qquad \text{sen } y = -\frac{3}{8}$$

sono possibili. — Le eguaglianze

$$\text{sen } x = 1{,}4 ; \qquad \text{sen } y = -1{,}08$$

sono impossibili.

§ 2. — Coseno di un angolo o di un arco, e sue variazioni.

44. — Sia $\widehat{AOP}$ un angolo qualunque (positivo o negativo), e P il punto d'incontro del lato OP con la circonferenza trigonometrica (fig. 11).

Df. — Chiameremo *coseno dell'angolo* $\widehat{AOP}$ (o dell'arco AP, e di ogni arco simile ad AP) l'ascissa del punto P.

Se PM, PN sono le normali agli assi condotte dal punto P, il coseno dell'angolo $\widehat{AOP}$ non è che il valore del segmento relativo OM, o quello di NP (preso con lo stesso segno di OM).

Si può osservare che questa **Df** è una generalizzazione di quella che abbiamo dato per il coseno di un angolo acuto.

45. — Variazioni del coseno. — Se l'angolo $\widehat{AOP}$ è nullo, il punto P coincide con A; e quindi:

$$\cos 0° = 1 ;$$

(il coseno di un angolo nullo è 1).

Se l'argomento cresce da 0° a 90°, il punto M va da A in O; quindi il coseno diminuisce da *1* a *0* (passando per tutti i valori intermedi):

$$\cos 90° = 0;$$

(il coseno di un angolo retto è nullo).

Se l'argomento cresce da 90° a 180°, il punto M va da O in C; quindi il coseno diminuisce da *0* a -1:

$$\cos 180° = -1;$$

(il coseno di un angolo piatto è eguale a — 1).

Crescendo l'argomento da 180° a 270°, il coseno cresce da -1 a *0*:

$$\cos 270° = 0.$$

Se l'argomento cresce da 270° a 360°, il coseno cresce da *0* a *1*:

$$\cos 360° = 1.$$

In conclusione, il coseno, come il seno, varia tra 1 e -1; può assumere qualunque valore compreso tra questi limiti, e, facendo astrazione dal segno, assume tutti i valori di cui è capace, allorchè l'argomento varia da 0° a 90°.

§ 3. — Tangente di un angolo o di un arco qualunque, e sue variazioni.

46. — Sia $\widehat{AOP}$ (fig. 12) un angolo qualunque (positivo o negativo) e T il punto d'incontro del lato OP con la tangente alla circonferenza trigonometrica nel punto A.

Df. — Chiameremo *tangente dell'angolo* $\widehat{AOP}$ (o dell'arco AP, e di ogni arco simile ad AP) l'ordinata del punto T.

Se TR è la normale ad $Y'Y$ condotta dal punto T, la

tangente dell'angolo $\widehat{AOP}$ non è che il valore del segmento relativo OR.

Si può osservare che questa **Df** è una generalizzazione di quella che abbiamo dato per la tangente di un angolo acuto.

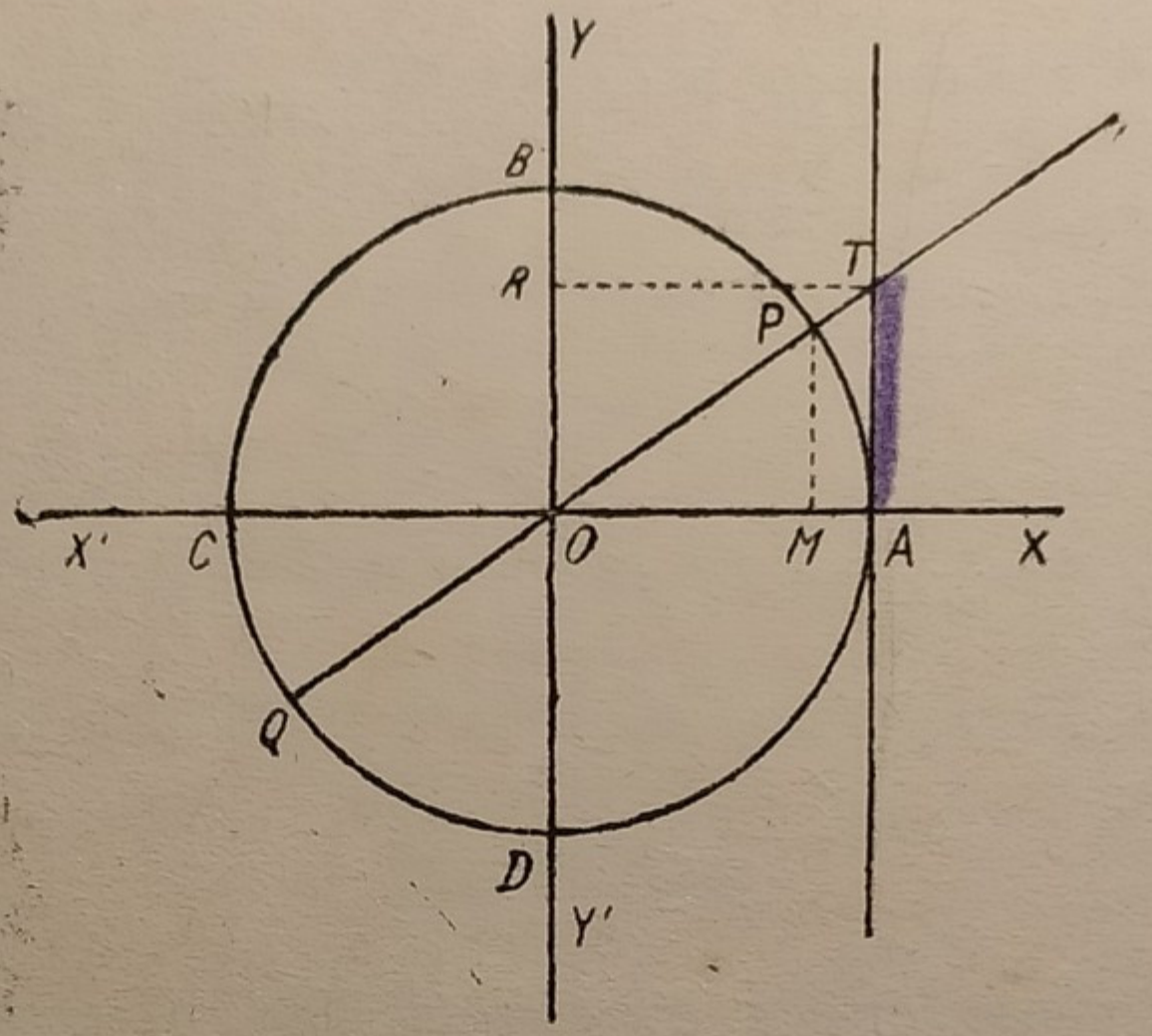


Fig. 12.

47. — Variazioni della tangente. — Se l'angolo $\widehat{AOP}$ è nullo, il punto T coincide con A; e poichè i punti dell'asse $X'X$ hanno ordinata nulla, sarà:

$$\text{tg } 0^\circ = 0;$$

(la tangente di un angolo nullo è 0).

È facile vedere che se l'argomento cresce da 0° a 45°, il punto R va da O in B; quindi la tangente cresce da 0 a 1 (passando per tutti i valori intermedi); così ritroviamo che

$$\text{tg } 45^\circ = 1.$$

Crescendo l'angolo $\widehat{AOP}$ da 45° a 90°, il punto R si allontana *indefinitamente* dal punto O; l'ordinata (OR) è capace di diventare maggiore di qualunque numero dato. — Quando l'angolo diventa eguale a 90°, il punto T non esiste più. Esprimiamo questo fatto scrivendo:

$$\text{tg } 90^\circ = \infty,$$

dove il segno ∞ si legge: *infinito*. E dicendo che, quando l'angolo cresce da 0° a 90°, la tangente cresce da *0* a *infinito*, intendiamo che essa è capace di acquistare un valore maggiore di qualunque numero dato.

Se l'angolo cresce da 90° a 180°, la tangente diventa negativa (perchè il punto T cade entro l'angolo $\widehat{Y'OX}$), e va crescendo, finchè, quando l'angolo diventa eguale a 180°, si ha:

$$\text{tg } 180° = 0.$$

Se l'angolo cresce da 180° a 270°, la tangente torna ad essere positiva, e cresce *indefinitamente*, cioè diventa maggiore di qualunque numero dato:

$$\text{tg } 270° = \infty.$$

Se l'angolo cresce da 270° a 360° la tangente diventa ancora negativa, e va crescendo, per modo che quando l'angolo diventa eguale a 360°, si ha:

$$\text{tg } 360° = 0.$$

In conclusione, la tangente di un angolo può assumere qualunque valore positivo o negativo, cioè, come si suol dire, varia tra $+\infty$ e $-\infty$; e anch'essa, quando non si badi al segno, acquista tutti i valori, di cui è capace, allorchè l'angolo varia da 0° a 90°.

§ 4. — Segni delle funzioni trigonometriche secondo la regione angolare in cui termina l'argomento.

48. — Il seno è positivo se l'angolo termina nella 1ª o 2ª regione angolare; negativo se termina nella 3ª o nella 4ª.

Il coseno è positivo se l'angolo termina nella 1ª o 4ª regione angolare; negativo se termina nella 2ª o 3ª.

La tangente è positiva se l'angolo termina nella 1ª o 3ª regione angolare; negativa se termina nella 2ª o 4ª.

Segni del seno

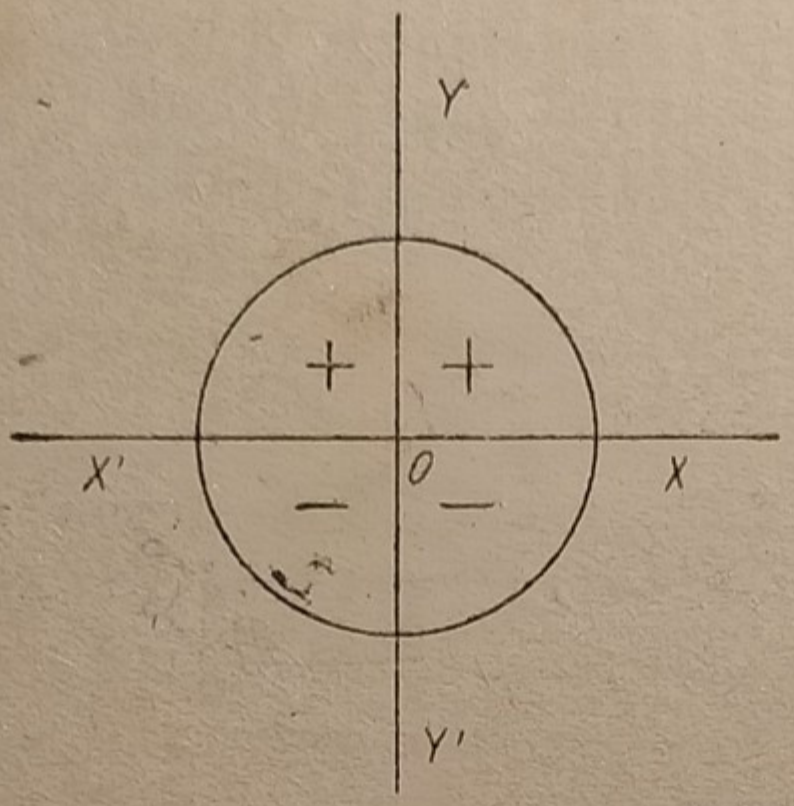


Fig. 13.

Segni del coseno

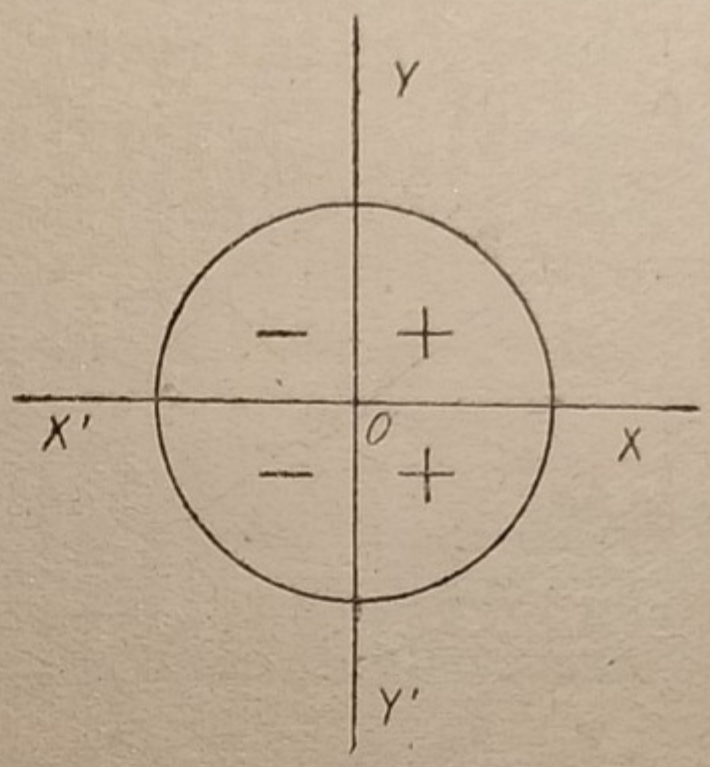


Fig. 14.

Segni della tangente

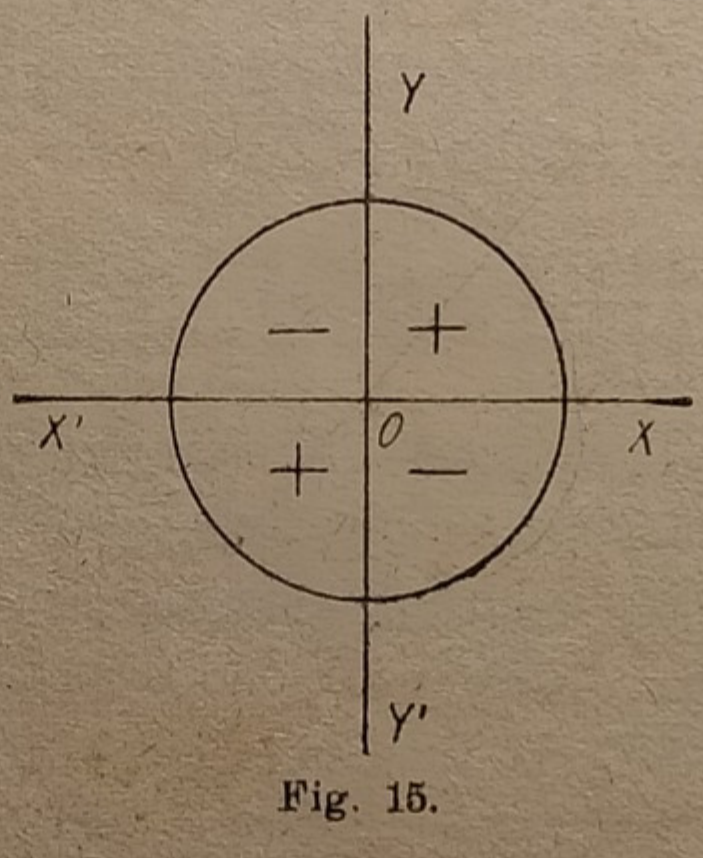


Fig. 15.

§ 5. — Valori delle funzioni trigonometriche degli angoli 0°, 90°, 180°, 270°.

49. — I valori delle funzioni trigonometriche di questi angoli speciali sono indicati nella seguente tabella:

	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	−1
cos	1	0	−1	0
tg	0	∞	0	∞

§ 6. — Relazioni tra le funzioni trigonometriche di uno stesso angolo.

50. — Le due relazioni:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

che valgono nel caso degli angoli acuti, si estendono immediatamente, oltre che agli angoli particolari 0°, 90°, 180°,... (1), ad angoli qualunque, osservando per questi che l'ordinata e l'ascissa di un punto del cerchio trigonometrico sono cateti di un triangolo rettangolo di raggio 1; e che il rapporto dell'ordinata all'ascissa è eguale al rapporto della tangente al raggio 1, rapporti che corrispondono anche nel *segno*, come risulta dal § 4.

Funzioni trigonometriche di angoli aventi tra loro una determinata relazione.

§ 1. — Angoli associati e loro funzioni trigonometriche.

51. — Sia $\widehat{AOP}$ (fig. 16) un angolo qualunque (positivo o negativo), e P il punto d'incontro del suo lato estremo OP con la circonferenza trigonometrica. Si considerino i punti Q, S, R simmetrici del punto P rispetto agli assi e al centro O: essi sono vertici di un rettangolo $PQRS$ le cui diagonali PR, QS sono due diametri.

---

(1) Per essi basta una semplice verifica.

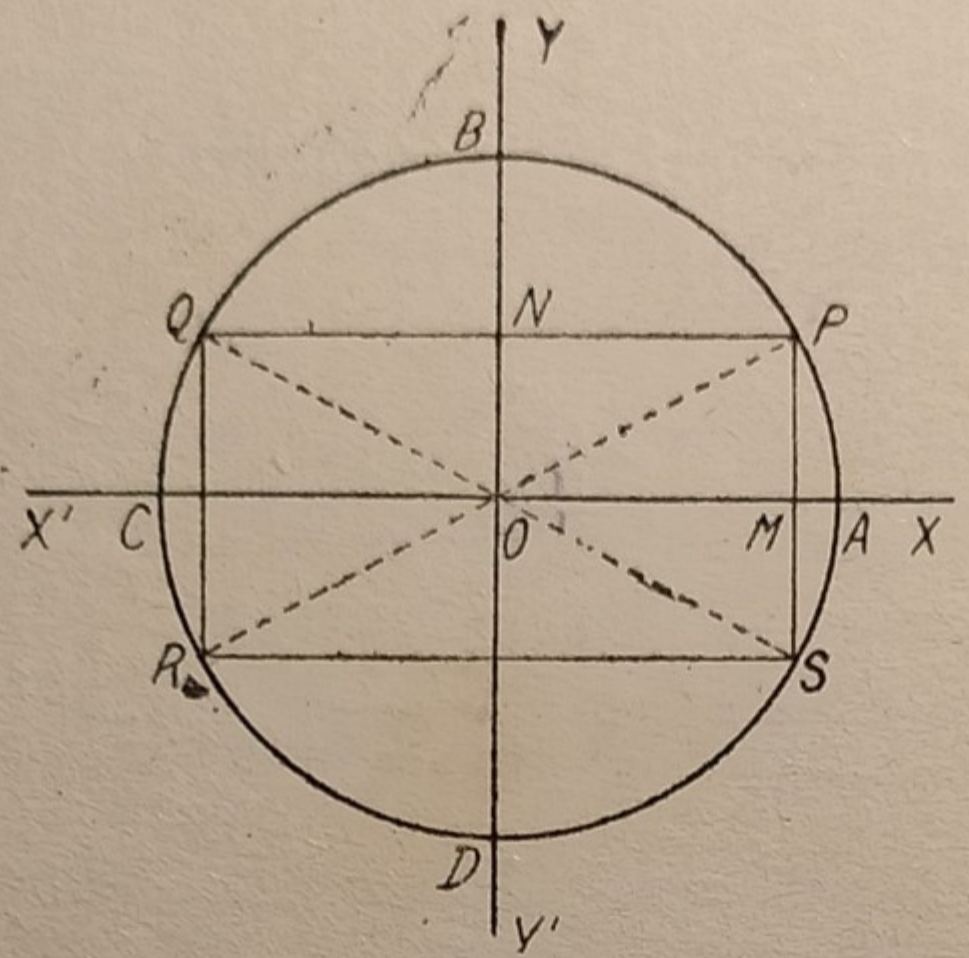


Fig. 16.

Gli angoli

$$\widehat{AOP}, \quad \widehat{AOQ},$$

$$\widehat{AOR}, \quad \widehat{AOS}$$

si diranno *associati.*

Manifestamente i valori assoluti delle coordinate dei punti P, Q, R, S sono eguali; quindi:

Angoli associati hanno, prescindendo dal segno, le stesse funzioni trigonometriche.

52. — È importante osservare che, dato un angolo qualunque non compreso tra 0° e 90° (com'è, per es., ognuno degli angoli $\widehat{AOQ}$, $\widehat{AOR}$, $\widehat{AOS}$) ce n'è sempre uno, e uno solo, associato ad esso compreso tra 0° e 90° (l'angolo acuto $\widehat{AOP}$); e quindi, dato un angolo qualunque, ne esiste sempre un solo, compreso tra 0° e 90°, le cui funzioni trigonometriche, quando si prescinda dal segno, sono eguali a quelle dell'angolo dato.

§ 2. — Periodicità delle funzioni trigonometriche.

53. — Consideriamo *tutti* gli angoli che hanno la stessa origine OA e lo stesso estremo (per es. OP). Sappiamo che essi sono dati dalla formula:

$$\alpha + k \,.\, 360°,$$

essendo α l'ampiezza di uno qualunque di essi.

Dalle Df di *sen, cos, tg* risulta che i valori di queste funzioni non dipendono che dalla posizione del punto P; quindi tutti gli angoli dati dalla formula precedente hanno le stesse funzioni trigonometriche; cioè:

$$\text{sen}\,(\alpha + k\,.\,360^\circ) = \text{sen}\,\alpha\,;$$

$$\cos\,(\alpha + k\,.\,360^\circ) = \cos\,\alpha\,;$$

$$\text{tg}\,(\alpha + k\,.\,360^\circ) = \text{tg}\,\alpha\,.$$

Questo fatto (*periodicità delle funzioni trigonometriche*) si esprime a parole così:

Aggiungendo ad un angolo un multiplo qualunque di 360° (positivo o negativo) nessuna delle sue funzioni trigonometriche cambia.

Es.

$$\text{sen}\,405^\circ = \text{sen}\,(45^\circ + 360^\circ) = \text{sen}\,45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,;$$

$$\cos 780^\circ = \cos\,(60^\circ + 2\,.\,360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\,;$$

$$\text{tg}\,(-315^\circ) = \text{tg}\,(45^\circ - 360^\circ) = \text{tg}\,45^\circ = 1\,.$$

§ 3. — Funzioni trigonometriche di angoli opposti.

54. — Se $\widehat{AOP} = \alpha$ (fig. 16) è un angolo qualunque, il suo opposto $\widehat{AOS} = -\alpha$ è uno degli angoli associati ad esso. Manifestamente i due punti P, S hanno ordinate opposte, ma la stessa ascissa. Quindi:

$$\text{sen}\,(-\alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha\,;$$

$$\cos\,(-\alpha) = +\cos\,\alpha\,;$$

$$\text{tg}\,(-\alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha\,;$$

cioè:

Angoli opposti hanno seni opposti; coseni eguali; tangenti opposte.

Es.

$$\text{sen}\,(-60^\circ) = -\,\text{sen}\,60^\circ = -\,\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = +\,\frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\text{tg}\,(-30^\circ) = -\,\text{tg}\,30^\circ = -\,\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

§ 4. — Funzioni trigonometriche di angoli complementari.

55. — Due angoli (o due archi) qualunque si dicono *complementari*, se la loro somma è 90°.

Così il complemento di 50° è 40°;
» » » 90° » 0°;
» » » 120° » — 30°.

Il complemento di α è espresso, in ogni caso, da $(90^\circ - \alpha)$.

56. — Nel cerchio trigonometrico l'estremo di un arco qualunque α sia il punto P di ascissa x e di ordinata y. Se ora si cambia il senso degli archi e si prende per origine di essi l'estremo B del 1° quadrante, l'arco 90° terminerà nell'origine primitiva A, e quindi l'estremo dell'arco $(90^\circ - \alpha)$ coinciderà con lo stesso punto P, in cui terminava l'arco α. Però in questo secondo caso le coordinate di P si scambiano, perchè, secondo le **Df** stabilite, devono ritenersi scambiati gli assi; cioè y sarà l'ascissa e x l'ordinata di P.

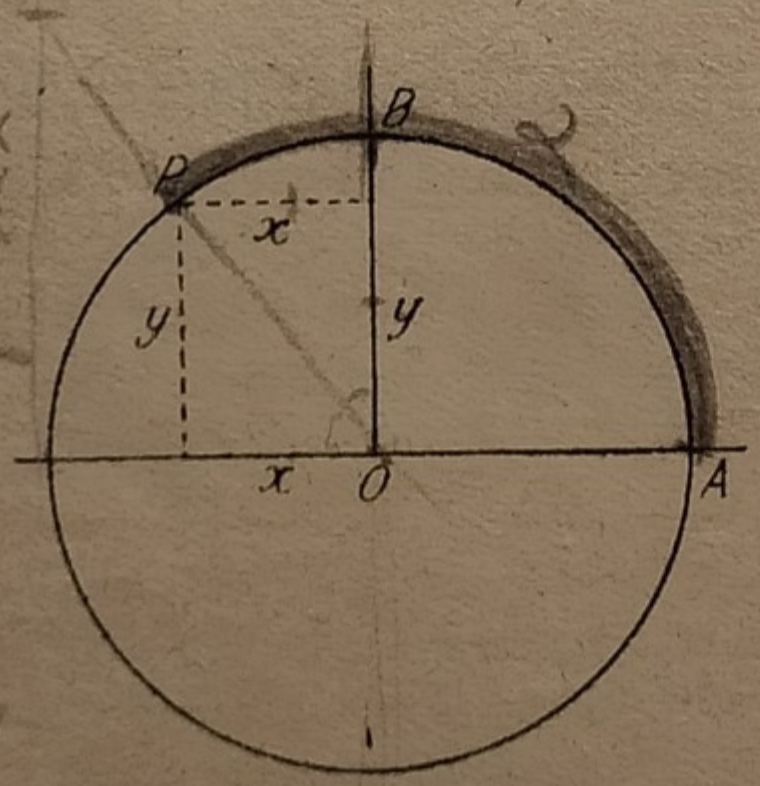


Fig. 17.

Ciò posto, si ha immediatamente:

$$\text{sen}\,(90^\circ - \alpha) = x = \cos\alpha\,,$$

$$\cos\,(90^\circ - \alpha) = y = \text{sen}\,\alpha\,,$$

$$\text{tg}\,(90^\circ - \alpha) = \frac{x}{y} = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}\,.$$

Queste formule sono identiche a quelle stabilite per l'angolo acuto, cioè:

Il seno e il coseno di un angolo sono rispettivamente eguali al coseno e al seno dell'angolo complementare. — *Le tangenti di angoli complementari sono numeri reciproci.*

Es.

$$\text{sen}\,120^\circ = \cos\,(-30) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,;$$

$$\cos 108^\circ = \text{sen}\,(-18^\circ) = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,;$$

$$\text{tg}\,30^\circ = \frac{1}{\text{tg}\,60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Osservazione. — Anche nel caso di angoli qualunque, chiameremo *cotangente* di un angolo la tangente dell'angolo complementare; e si avrà la relazione:

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}\,.$$

§ 5. — Funzioni trigonometriche di angoli supplementari.

57. — Due angoli (o due archi) positivi o negativi, si dicono *supplementari*, se la loro somma è 180°.

Così il supplemento di 120° è 60°;
" " " 0° " 180°;
" " " 200° " — 20°; ec.

Il supplemento di α è espresso in ogni caso da $(180° - \alpha)$.

Se $\widehat{AOP} = \alpha$ (fig. 16) è un angolo qualunque, il suo supplemento è un angolo associato ad esso che ha per estremo la semiretta OQ (essendo Q simmetrico di P rispetto ad $Y'Y$). Ora i due punti P, Q hanno eguali ordinate, ma ascisse opposte; perciò:

$$\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha\,;$$

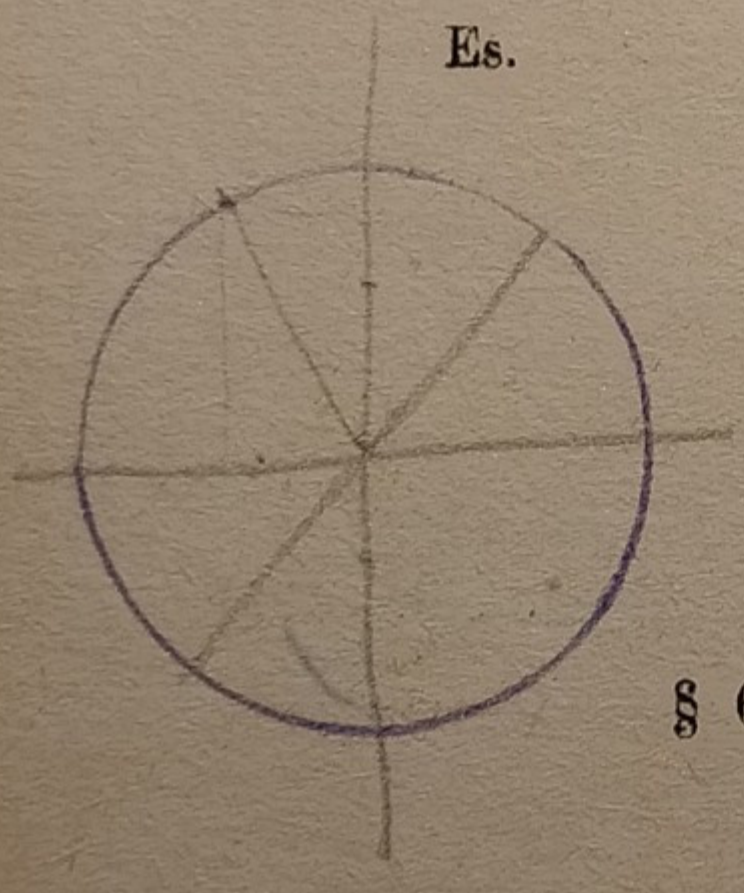
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha\,;$$

$$\text{tg}\,(180° - \alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha\,;$$

cioè:

Angoli supplementari hanno seni eguali; coseni opposti; tangenti opposte.

Es.



$$\text{sen}\,150° = \text{sen}\,30° = \frac{1}{2}\,;$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}\,;$$

$$\text{tg}\,135° = -\,\text{tg}\,45° = -1\,.$$

§ 6. — Funzioni trigonometriche di angoli che differiscono di 180°.

58. — Se $\widehat{AOP} = \alpha$ (fig. 16) è un angolo qualunque, aumentandolo o diminuendolo di 180°, si ottiene l'angolo $\widehat{AOR} = \alpha \pm 180°$ che è associato ad esso. Ora i due punti P, R, simmetrici rispetto ad O, hanno ordinate opposte e ascisse opposte; quindi:

$$\text{sen}\,(\alpha \pm 180°) = -\,\text{sen}\,\alpha\,;$$

$$\cos(\alpha \pm 180°) = -\cos\alpha\,;$$

$$\text{tg}\,(\alpha \pm 180°) = \text{tg}\,\alpha\,;$$

cioè:

Angoli che differiscono di 180° hanno seni opposti; coseni opposti; tangenti eguali.

Es.

$$\text{sen } 225° = -\text{ sen } 45° = -\frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\text{tg } 225° = \text{tg } 45° = 1. \text{ (}^1\text{)}$$

§ 7. — Funzioni trigonometriche di angoli che differiscono di 90°.

59. — Tenendo conto delle relazioni tra le funzioni trigonometriche di angoli complementari, supplementari e opposti, si ha:

$$\text{sen}(\alpha + 90°) = \text{sen}[180° - (90° - \alpha)] = \text{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha + 90°) = \cos[180° - (90° - \alpha)] = -\cos(90° - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha;$$

$$\text{sen}(\alpha - 90°) = -\text{sen}(90° - \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha - 90°) = \cos(90° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha.$$

Dividendo membro a membro le prime due e le ultime due, abbiamo:

$$\text{tg}(\alpha \pm 90°) = -\frac{1}{\text{tg}\,\alpha};$$

cioè:

---

(1) Si può dire anche: *aumentando un angolo di 180° il seno e il coseno cambiano di segno; la tangente non cambia.* Quindi *180°* è *un semiperiodo* per il *sen* e il *cos*; è un *periodo* completo per la *tg*.

$180 - (90 - \alpha) = 180 - 90 + \alpha = 90 + \alpha$

$\text{sen}(90 + \alpha) = \text{sen}(90 - \alpha) = \cos\alpha$

Le tangenti di angoli che differiscono di 90° sono due numeri tali che l'uno è il reciproco dell'opposto dell'altro.

Es.

$$\text{sen } 150° = \cos 60° = \frac{1}{2};$$

$$\cos 150° = -\text{ sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 30° = \text{sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{tg } 135° = \frac{-1}{\text{tg } 45°} = -1.$$

§ 8. — Funzioni trigonometriche di angoli la cui somma è 360°.

60. — Se $\widehat{AOP} = \alpha$ (fig. 16) è un angolo qualunque, l'angolo $(360° - \alpha)$, che ha per estremo il lato OS, è uno degli angoli associati ad esso, e differisce di $360°$ dall'opposto di α.

Quindi (n. 54):

$$\text{sen } (360° - \alpha) = \text{sen } (-\alpha) = -\text{ sen } \alpha;$$

$$\cos (360° - \alpha) = \cos (-\alpha) = \cos \alpha;$$

$$\text{tg } (360° - \alpha) = \text{tg } (-\alpha) = -\text{ tg } \alpha.$$

Determinazione delle funzioni trigonometriche di un angolo e degli angoli di data funzione trigonometrica.

§ 1. — Riduzione degli angoli al primo quadrante.

61. — Abbiamo già osservato che, dato un angolo qualunque non compreso tra 0° e 90°, ne esiste un altro e uno solo, associato ad esso, compreso tra 0° e 90°, le cui funzioni trigonometriche sono in valore assoluto eguali a quelle dell'angolo dato.

Ridurre un angolo al primo quadrante significa trovare l'angolo associato ad esso, compreso tra 0° e 90°.

Impariamo a fare questa riduzione.

Osserviamo anzitutto che se l'angolo dato non è compreso tra 0° e 360°, potremo trovarne un altro, che si dice pure *associato* ad esso, compreso tra 0° e 360°, diminuendo o aumentando quello di un determinato multiplo di 360°; e siamo sicuri che, così facendo, il nuovo angolo avrà le stesse funzioni trigonometriche dell'angolo dato (n. 53).

Ciò premesso, resta a far vedere come si riduca al primo quadrante un angolo compreso tra 90° e 360°.

Se l'angolo è compreso tra 90° e 180°, basterà prenderne il supplemento (n. 57).

Se l'angolo è compreso tra 180° e 270°, basterà diminuirlo di 180° (n. 58).

Se l'angolo è compreso tra 270° e 360°, basterà toglierlo da 360° (n. 60).

Osservazione. — La riduzione degli angoli al primo quadrante è operazione importante in pratica. Essa ci permette di trovare le funzioni trigonometriche di tutti gli angoli, servendoci delle *tavole* che abbiamo spiegato.

Così, per es.,

$$\text{sen } 1000^\circ = \text{sen } 280^\circ = -\text{ sen } 80^\circ ;$$

$$\cos 579^\circ = \cos 219^\circ = -\cos 39^\circ ;$$

$$\text{tg } (-500^\circ) = \text{tg } 220^\circ = \text{tg } 40^\circ .$$

§ 2. — Espressioni degli angoli che hanno una data funzione trigonometrica.

62. — In ciò che segue, ci proponiamo di risolvere il seguente problema: Trovare tutti gli angoli, dei quali sia data una delle funzioni trigonometriche.

Distingueremo i seguenti casi:

1°. — *Dato sen x, trovare x.*

Supponiamo che sia $\text{sen } x = a$, dove a è un numero dato positivo o negativo, dell'intervallo $(-1, \ldots 1)$. Presa l'ordinata $(ON) = a$ (fig. 16), si conduca per N la parallela ad $X'X$, che incontri la circonferenza trigonometrica in P e Q.

Manifestamente tutti, e soltanto tutti gli angoli associati $\widehat{AOP}$, $\widehat{AOQ}$ hanno il seno eguale ad a. Se α è uno di essi, tutti gli angoli richiesti sono dati da:

$$\alpha + k \,.\, 360^\circ ;$$

$$(180^\circ - \alpha) + k \,.\, 360^\circ .$$

Es. — Trovare x, sapendo che

$$\text{sen } x = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Uno degli angoli, il cui seno è $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, è 45°; perciò:

$$x = \begin{cases} 45^\circ + h \,.\, 360^\circ \\ 135^\circ + k \,.\, 360^\circ . \end{cases}$$

2°. — *Dato* $\cos x$, *trovare* x.

Supponiamo che sia $\cos x = a$, dove a è un numero dato, positivo o negativo, dell'intervallo $(-1, \ldots 1)$. Presa l'ascissa $(OM) = a$ (fig. 16), si conduca per M la parallela ad $Y'Y$, che incontri la circonferenza trigonometrica in P e S. Manifestamente tutti, e soltanto tutti gli angoli associati $\widehat{AOP}$, $\widehat{AOS}$ hanno il coseno eguale ad a. Se α è uno di essi, tutti gli angoli richiesti sono dati da:

$$\pm\alpha + k \,.\, 360°.$$

Es. — Trovare x sapendo che

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

Uno degli angoli, il cui coseno è $-\frac{1}{2}$, è 120°; perciò:

$$x = \pm 120° + k \,.\, 360°.$$

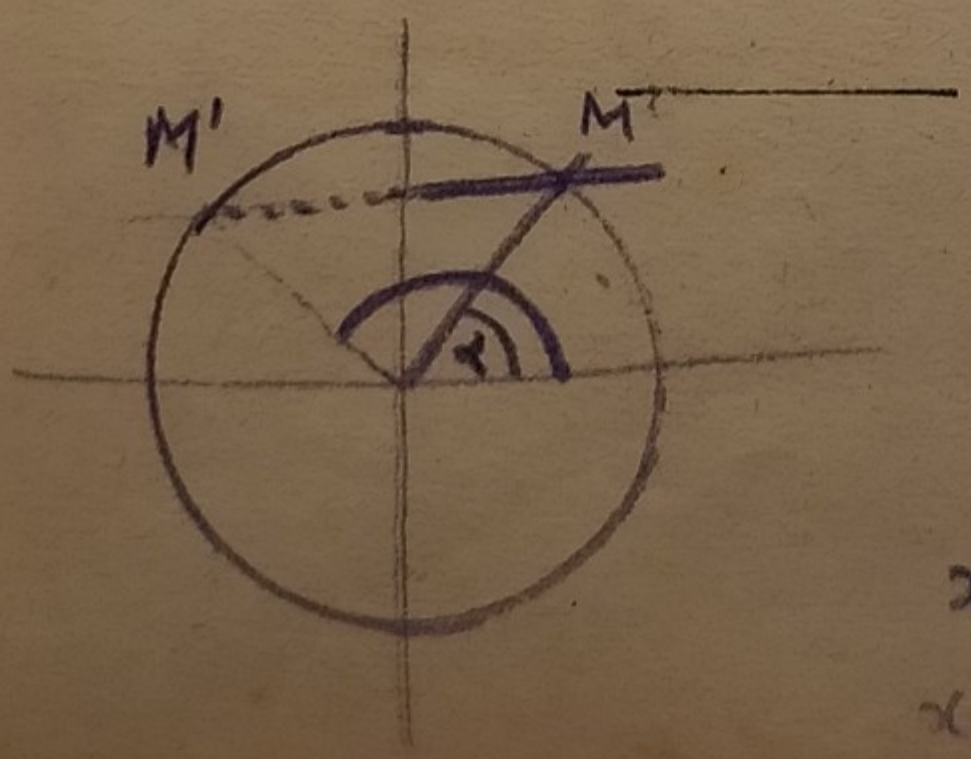
3°. — *Data* $tg\, x$, *trovare* x.

Sia $\operatorname{tg} x = a$, dove a è un *numero qualunque*. Presa l'ordinata $(OR) = a$ (fig. 12), si conduca per il punto R la parallela ad $X'X$, che incontri in T la tangente alla circonferenza trigonometrica nel punto A. Si conduca la secante OT che incontri la circonferenza nei punti P, Q. Manifestamente tutti, e soltanto tutti gli angoli associati $\widehat{AOP}$, $\widehat{AOQ}$, hanno la tangente eguale ad a. Se α è uno di essi, tutti gli angoli richiesti sono dati da:

$$\alpha + k \,.\, 180°.$$

Es. — Trovare x, sapendo chè $\operatorname{tg} x = 1$.
Uno degli angoli, la cui tangente è 1, è 45°, perciò:

$$x = 45° + k \,.\, 180°.$$



Generalizzazione delle formule di addizione e sottrazione, e conseguenze.

§ 1. — Formule di addizione e sottrazione per angoli qualunque.

63. — La dimostrazione (v. n. 20) delle formule:

$$(1)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\,, \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\,, \end{cases}$$

per il caso che α, β e $(\alpha+\beta)$ siano angoli acuti, si può applicare ed estendere senz'altro al caso che $\alpha+\beta$ sia un angolo retto o un angolo ottuso (1), pur rimanendo acuti α e β.

Le (1) sono pure verificate, se uno degli angoli, per es. β, fosse retto; e infatti:

$$\operatorname{sen}(\alpha+90^\circ) = \operatorname{sen}\alpha\cos 90^\circ + \cos\alpha\operatorname{sen}90^\circ = \cos\alpha\,,$$

$$\cos(\alpha+90^\circ) = \cos\alpha\cos 90^\circ - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}90^\circ = -\operatorname{sen}\alpha\,,$$

come già sappiamo dal n. 59.

Valgono pure le (1) per $\alpha = \beta = 90^\circ$, come subito può verificarsi.

Finalmente, se nelle (1), vere per angoli α e β non superiori

---

(1) Lo stesso metodo potrebbe applicarsi, con qualche modificazione, per angoli qualunque. Intanto l'alunno provi a ripetere le costruzioni e le dimostrazioni per i casi che l'angolo $(\alpha+\beta)$ sia retto ed ottuso.

a 90°, supponiamo di aumentare di 90° uno degli angoli, per es. α, si avrebbe:

$$\operatorname{sen}[(\alpha + 90^\circ) + \beta] = \operatorname{sen}(\alpha + 90^\circ)\cos\beta + \cos(\alpha + 90^\circ)\operatorname{sen}\beta;$$

$$\cos[(\alpha + 90^\circ) + \beta] = \cos(\alpha + 90^\circ)\cos\beta - \operatorname{sen}(\alpha + 90^\circ)\operatorname{sen}\beta;$$

formule che subito verifichiamo esatte, perchè (v. n. 59) la prima di queste si riduce alla seconda delle (1), e inversamente la seconda alla prima.

In tal modo abbiamo provato che se le (1) valgono per i due angoli α e β, valgono pure se uno qualunque di essi si aumenta di 90°; e quindi applicando successivamente questa proprietà, la generalizzazione delle (1) resta dimostrata, qualunque siano gli angoli positivi α e β.

Se poi l'uno o l'altro degli angoli fosse negativo, si potrà far sempre in modo che l'angolo $\alpha' = (k \cdot 360^\circ + \alpha)$ ovvero l'angolo $\beta' = (k \cdot 360^\circ + \beta)$ sia positivo, e allora valgono le formule:

$$\operatorname{sen}(\alpha' + \beta') = \operatorname{sen}\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha'\operatorname{sen}\beta',$$

$$\cos(\alpha' + \beta') = \cos\alpha'\cos\beta' - \operatorname{sen}\alpha'\operatorname{sen}\beta',$$

le quali, per la periodicità delle funzioni trigonometriche, si riducono alle (1), potendosi sostituire α, β ad α', β'. Quindi anche nell'ipotesi che uno o ambedue gli angoli α, β fossero negativi, valgono le formule di addizione.

64. — Se nelle formule di *addizione per il seno e il coseno* si cambia β in $-\beta$ (il che può sempre farsi come abbiamo già detto) risultano pure generalizzate le note formule di *sottrazione per il seno e il coseno*; e come prima conseguenza delle une e delle altre si avranno le rispettive formule per la tangente.

Pertanto avremo, qualunque siano gli angoli α e β, le seguenti formule di addizione e sottrazione:

$$(1)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}\,; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}\,. \end{cases}$$

§ 2. — Formule di duplicazione e di bisezione.

65. — Come conseguenza delle (1) del n. precedente si hanno le formule generali di *duplicazione*:

$$(3)\quad \begin{cases} \operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,, \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\,, \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,; \end{cases}$$

od anche:

$$(3)'\quad \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}\alpha\cos\dfrac{1}{2}\alpha\,, \\ \cos\alpha = \cos^2\dfrac{1}{2}\alpha - \operatorname{sen}^2\dfrac{1}{2}\alpha\,, \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{1}{2}\alpha}\,. \end{cases}$$

66. — Dalle formule

$$\cos^2\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\alpha = 1\,,$$

$$\cos^2\frac{1}{2}\alpha - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\alpha = \cos\alpha\,,$$

sommando e sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$2\cos^2\frac{1}{2}\alpha = 1 + \cos\alpha,$$

$$2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha,$$

e di qui le formule di *bisezione*:

$$(4)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \\ \cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \end{cases}$$

Osservazione. — In queste formule il segno premesso alla radice dovrà essere quello positivo o quello negativo, secondo che per l'angolo $\frac{1}{2}\alpha$ la rispettiva funzione deve risultare positiva o negativa.

Se, per es., $\alpha = 200°$, nella prima delle (4) va preso il segno positivo, nelle altre due il negativo.

§ 3. — Di alcune formule di trasformazione.

67. — Dalle (1) e dalle (2) (n. 64), per addizione e sottrazione, si ricava:

$$(5)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta, \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta, \\ \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta, \\ \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta; \end{cases}$$

e quindi:

$$(6)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)] \\ \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)] \\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] \\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \end{cases}$$

Per mezzo delle formule (6) (dette di *prostaferesi*) si trasforma un prodotto di due funzioni trigonometriche (seni e coseni) in una somma di altre due della stessa specie.

Osservazione. — Per l'uso pratico di queste formule servono le *Tavole dei valori delle funzioni trigonometriche.*

Per es.:

$$\operatorname{sen}100^\circ \times \cos 80^\circ = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}180^\circ + \operatorname{sen}20^\circ)$$

$$= \frac{0{,}3420}{2} = 0{,}1710.$$

68. — Se nelle (5) poniamo:

$$\alpha+\beta=\alpha'; \qquad \alpha-\beta=\beta',$$

risulterà:

$$\alpha=\frac{\alpha'+\beta'}{2}; \qquad \beta=\frac{\alpha'-\beta'}{2},$$

e quindi, sopprimendo gli apici,

$$(7)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}. \end{cases}$$

Con queste formule una somma di due funzioni trigonometriche (seni e coseni) si trasforma in un prodotto di altre due.

È utile questa trasformazione, quando le funzioni si conoscono per mezzo dei loro logaritmi (*tavole logaritmico-trigonometriche*).

69. — Un'altra trasformazione, di cui in seguito potremo servirci, si ha dividendo membro a membro le prime due delle (7):

$$(8)\qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

cioè:

Il rapporto della differenza di due seni alla loro somma è eguale al rapporto della tangente della semidifferenza alla tangente della semisomma dei rispettivi argomenti.

Es.

$$\frac{\operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Risoluzione di triangoli qualunque.

---

§ 1. — Relazioni tra gli elementi di un triangolo.

70. — Per la risoluzione dei triangoli rettangoli ci ha bastato di conoscere la nota relazione tra i due angoli acuti (*complementari*), il teorema di Pitagora e le definizioni di *sen, cos, tg* di un angolo acuto.

Abbiamo pure accennato alla possibilità di risolvere un *triangolo qualunque* (v. n. 35) per mezzo di triangoli rettangoli ausiliari; ma

in questo caso i calcoli relativi riescono troppo lunghi. Si raggiunge più brevemente lo scopo, premettendo alcune relazioni tra i lati e le funzioni trigonometriche degli angoli di un triangolo.

Ma innanzi tutto ricordiamo la relazione tra gli angoli e la relazione tra i lati di un triangolo qualunque.

Se $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sono gli angoli di un triangolo, si ha:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^{\circ}.$$

Se a, b, c sono i lati di un triangolo, si ha:

$$a<b+c; \qquad a>b-c,$$

cioè:

Ogni lato è minore della somma e maggiore della differenza degli altri due.

71. — Teorema dei seni o Teorema di Eulero. — *In ogni triangolo, i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.*

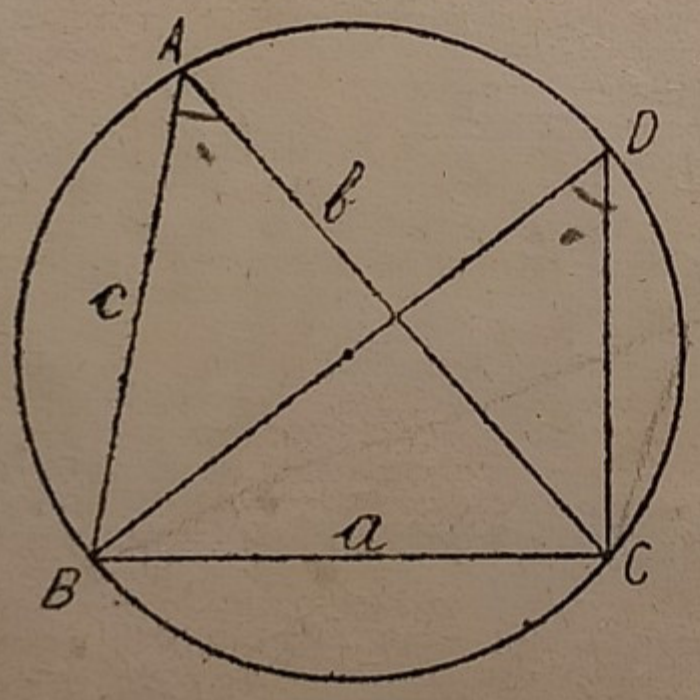


Fig. 18.

Si consideri il triangolo ABC di lati a, b, c, e circoscritto il cerchio di raggio R (fig. 18), da uno dei vertici, per es. B, si conduca il diametro BD, e si congiunga D con C. Sarà $\widehat{A}=\widehat{D}$, perchè questi due angoli alla circonferenza insistono sullo stesso arco BC.

Dal triangolo rettangolo BCD si ha, essendo $BD=2R$:

$$a=2R\,.\,\text{sen}\,\widehat{D}=2R\,.\,\text{sen}\,\widehat{A},$$

da cui:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}}=2R;$$

cioè:

In ogni triangolo il rapporto di un lato al seno dell'angolo opposto è eguale al diametro del cerchio circoscritto.

Si hanno pertanto i tre rapporti eguali:

$$\text{(I)} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}},$$

che dimostrano il teorema sopra enunciato.

Osservazione. — Si noti che col teorema di Eulero, detto appunto dei *seni*, si stabilisce la proporzionalità tra i lati e i *seni degli angoli* opposti di un triangolo; sarebbe errore gravissimo dire che i lati sono proporzionali agli *angoli*.

Per es., considerando un triangolo rettangolo isoscele, o i due triangoli rettangoli che si ottengono dividendo un triangolo equilatero con una delle altezze, si vede subito che in questi triangoli i lati *non* sono proporzionali agli angoli.

72. — Dalla (I) si ricava:

$$\frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen}\widehat{C}},$$

e quindi, *scomponendo* e *componendo*,

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{B} - \operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{B} + \operatorname{sen}\widehat{C}};$$

e per la (8) del n. 69:

$$\text{(II)} \qquad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}},$$

cioè:

In ogni triangolo la differenza di due lati sta alla loro somma, come la tangente della semidifferenza degli angoli opposti sta alla tangente della loro semisomma.

73. — **Teorema del coseno o Teorema di Carnot.** — *In ogni triangolo, il quadrato di un lato è eguale alla somma dei*

quadrati degli altri due, diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo da essi compreso.

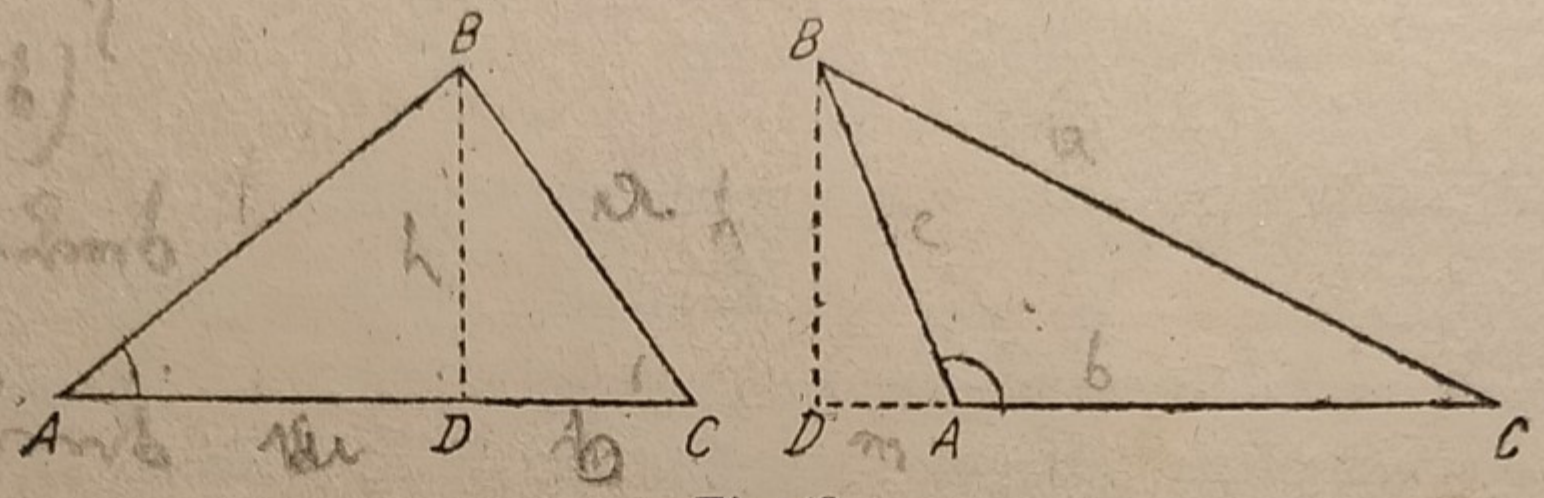


Fig. 19.

Per le relazioni geometriche tra i quadrati dei lati di un triangolo, sostituendo ai lati i loro valori, secondochè l'altezza BD (fig. 19) cada sulla base o fuori di essa, abbiamo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times AD,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \times AD;$$

nel 1° caso $AD = c \cos \widehat{A}$; nel 2° caso $AD = -c \cos \widehat{A}$; quindi, sostituendo, si avrà sempre:

$$\text{(III)} \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}.$$

Questa formula vale anche nel caso che l'angolo $\widehat{A}$ sia retto, cioè quando il lato a è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo; perchè allora il termine $2bc \cos \widehat{A}$ della (III) si annulla e si ritrova la relazione di Pitagora.

In questo modo la (III) riassume in una sola formula tre diversi teoremi di geometria.

Osservazione. — Insieme alla (III) si hanno le altre due:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}.$$

74. — Dalla (III), aggiungendo e togliendo nel secondo membro $2bc$ e associando convenientemente i termini, si hanno le due relazioni:

$$a^2 = (b-c)^2 + 2bc\,(1-\cos\widehat{A}),$$

$$a^2 = (b+c)^2 - 2bc\,(1+\cos\widehat{A}).$$

Ricordando (n. 66) che

$$1-\cos\widehat{A} = 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\widehat{A}}{2}, \qquad 1+\cos\widehat{A} = 2\cos^2\frac{\widehat{A}}{2},$$

sostituendo e trasportando, risulta:

$$4bc\,\mathrm{sen}^2\frac{\widehat{A}}{2} = a^2-(b-c)^2,$$

$$4bc\cos^2\frac{\widehat{A}}{2} = (b+c)^2-a^2.$$

Dividendo membro a membro, e trasformando le differenze dei due quadrati che figurano nel secondo membro, si ha:

$$\mathrm{tg}^2\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}.$$

Se indichiamo con $2p$ il perimetro del triangolo, sarà:

$$a+b+c=2p; \qquad a-b+c=2(p-b);$$

$$a+b-c=2(p-c); \qquad -a+b+c=2(p-a);$$

quindi sostituendo:

$$\mathrm{tg}^2\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}.$$

Si hanno per tal modo le formule:

$$(IV)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \\ \operatorname{tg}\dfrac{\widehat{B}}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \\ \operatorname{tg}\dfrac{\widehat{C}}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \end{cases}$$

Osservazione. — In queste formule le radici vanno prese col segno positivo, trattandosi di tangenti di angoli *acuti*.

§ 2. — Formule risolutive per triangoli qualunque e applicazioni.

75. — Le (I), (II), (III), (IV), insieme all'altra

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°,$$

costituiscono le *formule risolutive* per i triangoli, cioè le relazioni a quattro elementi, per mezzo delle quali, dati i tre elementi necessari a determinare un triangolo, si può calcolare ognuno degli altri.

Osservazione. — Oltre alle precedenti si possono trovare molte altre relazioni tra i lati e le funzioni trigonometriche degli angoli di un triangolo. Giova però riflettere che la massima parte di queste relazioni dipendono le une dalle altre. Effettivamente tra i *sei* elementi di un triangolo possono aver luogo solo *tre* relazioni *indipendenti*, affinchè, dati arbitrariamente tre di essi, si possano determinare gli altri tre.

Del resto è chiaro che la (II) e la (IV) sono immediata conseguenza delle (I) e (III).

76. — In ognuna delle relazioni (I) (teorema dei seni) figurano due lati e gli angoli opposti; quindi potremo determinare un lato (o un angolo) dati gli altri tre elementi.

Problema 1°. — *Risolvere il triangolo, dati un lato e i due angoli adiacenti.*

Risoluzione. — Essendo noti a, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, si devono calcolare $\widehat{A}$, b, c.

Dovendo essere $(\widehat{B}+\widehat{C})<180°$, le formule risolutive ci dànno:

$$\widehat{A}=180°-(\widehat{B}+\widehat{C});$$

$$b=\frac{a}{\text{sen } A}\times\text{sen }\widehat{B}; \qquad c=\frac{a}{\text{sen } A}\times\text{sen }\widehat{C}.$$

Es. — Sia:

$$a=150; \qquad \widehat{B}=82°20'; \qquad \widehat{C}=67°40'.$$

Sostituendo, abbiamo:

$$\widehat{A}=180°-(82°20'+67°40')=30°;$$

$$b=\left(150:\frac{1}{2}\right)\times 0{,}9911=297{,}33;$$

$$c=\left(150:\frac{1}{2}\right)\times 0{,}9250=277{,}50.$$

Osservazione. — Le medesime formule servono per il caso in cui gli elementi noti del triangolo siano un lato, l'angolo opposto e un angolo adiacente.

Es. — Sia:

$$a=450; \qquad \widehat{A}=46°40'; \qquad \widehat{B}=61°20'.$$

Le formule risolutive daranno:

$$\widehat{C}=180°-(46°40'+61°20')=72°.$$

$$b=\frac{450}{\text{sen } 46°40'}\times\text{sen } 61°20'; \qquad c=\frac{450}{\text{sen } 46°40'}\times\text{sen } 72°.$$

Per il calcolo di b e di c adoperiamo i logaritmi:

$$\log 450 = 2{,}6532$$
$$-\log \text{sen } 46^\circ 40' = 0{,}1416$$
$$\log \text{sen } 61^\circ 20' = \overline{1}{,}9432$$
$$\log b = 2{,}7380$$
$$b = \text{ant. log } 2{,}7380 = 547.$$

$$\log 450 = 2{,}6532$$
$$-\log \text{sen } 46^\circ 40' = 0{,}1416$$
$$\log \text{sen } 72^\circ = \overline{1}{,}9782$$
$$\log c = 2{,}7730$$
$$c = \text{ant. log } 2{,}7730 = 593.$$

77. — **Problema 2°.** — *Risolvere un triangolo, dati due lati e l'angolo opposto a uno di essi.*

RISOLUZIONE. — Essendo dati a, b, $\widehat{A}$, si devono calcolare c, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

La prima formula risolutiva da applicare sarà:

$$(1) \qquad \text{sen } \widehat{B} = \frac{b \text{ sen } A}{a};$$

e qui vanno considerati tre casi, secondo che si abbia:

$$a = b; \qquad a < b; \qquad a > b.$$

1° caso. — Essendo $a = b$, il triangolo dato è isoscele di base c, e se $\widehat{A}$ è acuto, la risoluzione del triangolo si riduce a quella di un triangolo rettangolo:

$$\widehat{B} = \widehat{A}; \qquad \widehat{C} = 180^\circ - 2\widehat{A};$$
$$c = 2a \cos \widehat{A}.$$

Se $\widehat{A}$ è retto od ottuso, non vi è triangolo avente quegli elementi.

2° caso. — Anche in questo caso ($a<b$) *dovrà* essere $\widehat{A}$ un angolo acuto, altrimenti la risoluzione del triangolo è impossibile, dovendo aversi $\widehat{A}<\widehat{B}$.

Oltre a ciò vanno considerate le tre seguenti ipotesi, relativamente alla (1):

$$\frac{b \operatorname{sen}\widehat{A}}{a}>1; \qquad \frac{b \operatorname{sen}\widehat{A}}{a}=1; \qquad \frac{b \operatorname{sen}\widehat{A}}{a}<1.$$

Nella 1ª ipotesi la determinazione di $\widehat{B}$ è impossibile, perchè dovrebbe essere $\operatorname{sen}\widehat{B}>1$.

Nella 2ª ipotesi risulta:

$$\operatorname{sen}\widehat{B}=1, \qquad \text{ossia} \qquad \widehat{B}=90°,$$

quindi:

$$\widehat{C}=90°-\widehat{A}; \qquad c=b\cos\widehat{A}.$$

Nella 3ª ipotesi il problema ha due soluzioni, perchè dalla (1) si ricavano due angoli $\widehat{B}$ aventi un dato seno, uno acuto (maggiore di $\widehat{A}$) e l'ottuso supplementare.

E così, dopo aver determinato l'angolo acuto $\widehat{B}$, per completare le due soluzioni si avrà:

$$\widehat{C}=180°-(\widehat{A}+\widehat{B}); \qquad c=\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}\times\operatorname{sen}(\widehat{A}+\widehat{B});$$

ovvero

$$\widehat{C}=\widehat{B}-\widehat{A}; \qquad c=\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}\times\operatorname{sen}(\widehat{B}-\widehat{A}).$$

3° caso. — Supposto $a>b$, l'angolo $\widehat{B}$ deve essere acuto, e quindi resta completamente determinato dalla (1).

Inoltre sarà:

$$\widehat{C}=180°-(\widehat{A}+\widehat{B}); \qquad c=\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}\times\operatorname{sen}\widehat{C}.$$

Osservazione 1ª. — In questo 3° caso la risoluzione del problema è sempre possibile ed *unica*; perciò in corrispondenza di questo problema si ha il teorema:

Due triangoli sono eguali, se hanno rispettivamente eguali due lati e l'angolo opposto al maggiore di essi.

Osservazione 2ª. — La *discussione* fatta per calcolare gli elementi incogniti di un triangolo, dati due lati e l'angolo opposto a uno di essi, concorda del tutto con la corrispondente costruzione geometrica del triangolo.

78. — Nelle relazioni (III) (teorema del coseno) figurano i tre lati di un triangolo e un angolo; quindi per mezzo di esse potremo determinare un lato, dati due lati e l'angolo compreso, ovvero determinare un angolo dati i tre lati.

Problema 3°. — ***Risolvere il triangolo, dati due lati e l'angolo da essi compreso.***

Essendo noti i lati b, c e l'angolo $\widehat{A}$, si devono calcolare gli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e il lato a.

1ª Risoluzione. — Dalle (III) si ricava:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}.$$

Noto a, supposto b non superiore a c, si ottiene:

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b\operatorname{sen}\widehat{A}}{a}\ (^1),$$

e quindi, per mezzo delle tavole, l'angolo *acuto* $\widehat{B}$.

$$\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}).$$

2ª Risoluzione. — Degli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ è nota la somma $(180^\circ - \widehat{A})$, e quindi la semisomma $\left(90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}\right)$.

(1) Si prova, con le ipotesi fatte, che deve essere $\frac{b\operatorname{sen} A}{a} < 1$.

Allora, applicando la (II), si ha:

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}=\frac{b-c}{b+c}\times\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2},$$

od anche:

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}=\frac{b-c}{b+c}\times\operatorname{cotg}\frac{\widehat{A}}{2}.$$

Da questa si ottiene l'angolo $\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$; e così avremo gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ per mezzo della loro semisomma e della loro semidifferenza.

Si ricava il lato a dalla formula del coseno, ovvero, dopo trovati gli angoli, dalle (I).

Es. — Calcolare $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, a, essendo dati:

$$\widehat{A}=50°\,30';\qquad b=454;\qquad c=312.$$

Troviamo subito:

$$\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}=90°-25°\,15'=64°\,45';$$

$$b-c=142;\qquad b+c=766;$$

quindi:

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}=\frac{142}{766}\times\operatorname{cotg}25°\,15'$$

Applicando i logaritmi si ha:

$$\begin{aligned}\log 142&=2{,}1523\\ -\log 766&=\bar{3}{,}1158\\ \log\operatorname{cotg}25°\,15'&=0{,}3264\\ \hline \log\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}&=\bar{1}{,}5945\end{aligned}$$

Per mezzo delle tavole si ricava:

$$\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2} = 21^\circ 28' ;$$

e poichè la semisomma dei medesimi angoli è $64^\circ 45'$, si avrà:

$$\widehat{B} = 86^\circ 13' ; \qquad \widehat{C} = 43^\circ 17' .$$

Per il calcolo di a ci varremo della formula:

$$a = \frac{454 \times \operatorname{sen} 50^\circ 30'}{\operatorname{sen} 86^\circ 13'} = \frac{454 \times 0{,}7716}{0{,}9978} ,$$

e quindi, approssimativamente,

$$a = 351.$$

79. — Problema 4°. — *Risolvere il triangolo, dati i tre lati.*

Essendo noti i lati a, b, c, si devono calcolare gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

1ª Risoluzione. — Dalle (III) si hanno le formule risolutive:

$$\cos \widehat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} ; \qquad \cos \widehat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} ;$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} ;$$

formule dalle quali è sempre possibile ricavare i tre angoli, purchè si verifichi che un lato è minore della somma e maggiore della differenza degli altri due. Infatti, in tal caso il valore assoluto di ciascuna frazione è sempre minore di 1.

Es. — Cerchiamo il massimo angolo $\widehat{A}$ del triangolo, i cui lati sono 15, 12, 5.

Si ha la formula:

$$\cos \widehat{A} = \frac{12^2+5^2-15^2}{2 \,.\, 5 \,.\, 12} = -\frac{56}{120} ,$$

ossia:

$$\cos \widehat{A} = -\frac{7}{15} = -0{,}4666\,,$$

dalla quale relazione si vede che $\widehat{A}$ è un angolo ottuso.

Chiamando $\widehat{A'}$ il suo supplemento (acuto), sarà:

$$\cos \widehat{A'} = 0{,}4666.$$

Di qui ricaviamo:

$$\widehat{A'} = 62^\circ\, 10',$$

e quindi:

$$\widehat{A} = 117^\circ\, 50'.$$

2ª Risoluzione. — Si possono prendere addirittura le (IV) come formule risolutive, cioè:

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\,; \quad \operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\,;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{C}}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\,.$$

Queste, sotto la solita condizione di relazione tra i lati di un triangolo, dànno la metà degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, e sono adatte al calcolo logaritmico.

Es. — Calcoliamo gli angoli acuti $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ del problema precedentemente proposto, nel quale cioè i lati siano 15, 12, 5.

Sostituendo si ha:

$$p = \frac{1}{2}(15 + 12 + 5) = 16\,;$$

$$p-a = 1\,; \qquad p-b = 4\,; \qquad p-c = 11\,;$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{11}{16 \times 4}\,; \qquad \operatorname{tg}^2 \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{4}{16 \times 11}\,.$$

Adoperando i logaritmi avremo:

$$\log 11 = 1{,}0414$$
$$-\log 16 = \bar{2}{,}7959$$
$$-\log 4 = \bar{1}{,}3980$$
$$2\log \operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2} = \bar{1}{,}2353$$

cioè:

$$\log \operatorname{tg}\frac{\widehat{B}}{2} = \bar{1}{,}6176,$$

da cui:

$$\frac{\widehat{B}}{2} = 22^\circ 30',$$

e quindi:

$$\widehat{B} = 45^\circ.$$

Similmente per avere l'angolo $\widehat{C}$ abbiamo:

$$\log 4 = 0{,}6020$$
$$-\log 16 = \bar{2}{,}7959$$
$$-\log 11 = \bar{2}{,}9586$$
$$2\log \operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2} = \bar{2}{,}3565$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{\widehat{C}}{2} = \bar{1}{,}1782; \qquad \frac{\widehat{C}}{2} = 8^\circ 35';$$

e quindi:

$$\widehat{C} = 17^\circ 10'.$$

Osservazione. — Come verifica del calcolo eseguito, si trova:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 117^\circ 50^\circ + 45^\circ + 17^\circ 10' = 180^\circ.$$

§ 3. — Area del triangolo.

80. — Dati gli elementi necessari e sufficienti a determinare un triangolo, non solo si devono saper calcolare, come s'è fatto nel § precedente, gli altri elementi, ma risulta pur chiara la possibilità di servirci di quei dati per il calcolo delle altezze, delle mediane, delle bisettrici, delle proiezioni reciproche dei lati, del raggio del cerchio inscritto, ec.

In particolare, ci limiteremo a dare alcune formule per l'*area del triangolo*.

Sappiamo dalla Geometria che, se in un triangolo indichiamo con a, h, S i valori di un lato, dell'altezza relativa e dell'area, si ha:

$$S = \frac{1}{2}\, a \,.\, h \,.$$

Inoltre indicando con p il semiperimetro e con r il raggio del cerchio inscritto, si ha pure:

$$S = p \,.\, r \,.$$

81. — Riprendiamo ora la formula

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}},$$

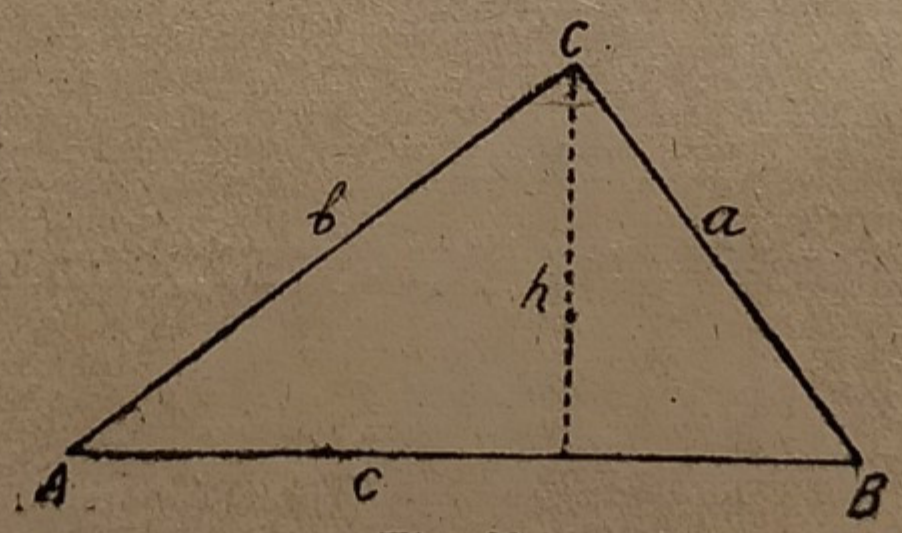


Fig. 20.

nella quale figurano i due lati a, b del triangolo ABC (fig. 20).

Eliminando i denominatori si ha:

$$a \operatorname{sen} \widehat{B} = b \operatorname{sen} \widehat{A} = h,$$

essendo h l'altezza relativa al terzo lato c. — Moltiplicando per c si ottiene:

$$ac \operatorname{sen} \widehat{B} = bc \operatorname{sen} \widehat{A} = hc = 2S;$$

quindi:

$$S = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \widehat{A},$$

cioè:

Dati due lati e l'angolo da essi compreso, l'area del triangolo si ha dal semiprodotto dei due lati per il seno dell'angolo compreso.

Es.

1°. — L'*area del triangolo equilatero*, di lato l, sarà:

$$S = \frac{1}{2} l^2 \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2.$$

2°. — L'*area del triangolo isoscele*, di lato l e di angolo al vertice $\widehat{B}$, sarà:

$$S = \frac{1}{2} l^2 \operatorname{sen} \widehat{B}.$$

3°. — Essendo

$$b = 50; \qquad c = 54; \qquad \widehat{A} = 40° 40'$$

si avrà:

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} 40° 40' = \frac{1}{2} \times 50 \times 54 \times 0{,}6517 = 879{,}79.$$

82. — Dalla medesima formula

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}}$$

moltiplicando ambedue i termini per $\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}}$

abbiamo:

$$\frac{a \,.\, b}{\operatorname{sen}\widehat{A} \,.\, \operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2 \widehat{A}};$$

od anche:

$$\frac{a\, b \operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{A} \,.\, \operatorname{sen}\widehat{B} \,.\, \operatorname{sen}\widehat{C}} = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2 \widehat{A}};$$

e quindi:

$$a\, b \operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{a^2 \operatorname{sen}\widehat{B} \,.\, \operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = 2S.$$

Pertanto, essendo $\widehat{B}+\widehat{C}$ il supplemento di $\widehat{A}$, sarà:

$$S = \frac{a^2 \operatorname{sen}\widehat{B} \,.\, \operatorname{sen}\widehat{C}}{2 \operatorname{sen}(\widehat{B}+\widehat{C})};$$

cioè:

Dato un lato e i due angoli adiacenti, l'area del triangolo si ha moltiplicando successivamente il quadrato del lato per i seni dei due angoli e dividendo per il doppio del seno della somma degli angoli stessi.

Es.

1°. — L'*area del triangolo isoscele*, di base b e di angolo al vertice $\widehat{B}$ sarà:

$$S = \frac{b^2 \,.\, \cos^2 \dfrac{\widehat{B}}{2}}{2 \operatorname{sen}\widehat{B}}.$$

Da questa formula, essendo $2 \operatorname{sen}\widehat{B} = 4 \operatorname{sen}\dfrac{\widehat{B}}{2} \cos\dfrac{\widehat{B}}{2}$, si ricava pure:

$$S = \frac{1}{4} b^2 \operatorname{cotg}\frac{\widehat{B}}{2}.$$

2°. — Essendo

$$a = 238; \qquad \widehat{B} = 112°; \qquad \widehat{C} = 32°,$$

si avrà:

$$S = \frac{238^2 \times \text{sen}\,112^\circ \times \text{sen}\,32^\circ}{2\,\text{sen}\,144^\circ}.$$

Per il calcolo di S ci serviremo dei logaritmi:

$$2\log 238 = 4{,}7532$$
$$\log \text{sen}\,112^\circ = \bar{1}{,}9672$$
$$\log \text{sen}\,32^\circ = \bar{1}{,}7242$$
$$-\log 2 = \bar{1}{,}6990$$
$$-\log \text{sen}\,144^\circ = 0{,}2308$$
$$\log S = 4{,}3744$$

$$S = \text{ant. log}\,4{,}3744 = 23683.$$

83. — Riprendendo la formula precedente, si ha:

$$S = \frac{a^2 \,.\, \text{sen}\,\widehat{B} \,.\, \text{sen}\,\widehat{C}}{2\,\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{a^2 \,.\, \text{sen}\,\widehat{A} \,.\, \text{sen}\,\widehat{B} \,.\, \text{sen}\,\widehat{C}}{2\,\text{sen}^2\,\widehat{A}};$$

e poichè

$$\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = 2R; \qquad \frac{a^2}{\text{sen}^2\,\widehat{A}} = 4R^2,$$

(R è il raggio del cerchio circoscritto), sostituendo si ottiene:

$$S = 2R^2 \,.\, \text{sen}\,\widehat{A} \,.\, \text{sen}\,\widehat{B} \,.\, \text{sen}\,\widehat{C};$$

cioè:

Dati gli angoli e il raggio del cerchio circoscritto, l'area del triangolo si ha moltiplicando il doppio del quadrato del raggio per il prodotto dei seni degli angoli.

Es.

L'area del triangolo regolare iscritto nel cerchio di raggio R sarà:

$$S = 2R^2 \times \text{sen}^3\,60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,R^2.$$

84. — Per note proprietà delle funzioni trigonometriche abbiamo:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{A}}{2}}{\cos^2\frac{\widehat{A}}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\widehat{A}}{2}}.$$

Ma sappiamo, per le (IV) del n. 74, che

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

quindi sostituendo:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = 2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} : \left(1+\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}\right);$$

ossia:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)+(p-b)(p-c)}.$$

Eseguendo, nel denominatore di quest'ultima frazione, le operazioni indicate dalle parentesi e riducendo, si ha:

$$p(p-a)+(p-b)(p-c) = bc,$$

quindi:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc},$$

ossia:

$$\frac{1}{2}bc \times \operatorname{sen}\widehat{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S.$$

La relazione

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

è detta formula di Erone.

Di qui risulta:

Essendo noti i lati, si ha l'area del triangolo applicando la formula di Erone.

Osservazione. — La formula di Erone è indipendente dagli angoli del triangolo, e quindi può trovarsi senza applicare le relazioni trigonometriche qui usate.

In diversi modi si giunge a questa formula, oltre a quello ordinariamente svolto, come applicazione dell'Algebra alla Geometria.

Vedi, per es., la *Storia delle scienze matematiche e fisiche*, vol. I, pag. 187 (Maximilien Marie); e anche i *Saggi di didattica matematica*, pag. 86 (Ciamberlini).

25-IV-33
10-54'-30"

ESERCIZI

1. — Secondo che un punto P sia *interno* a un segmento AB, o *esterno* (sui prolungamenti di AB), si conviene che le distanze di P dagli *estremi* del segmento siano *discordi* o *concordi*. In tal modo i due numeri relativi che determinano quelle distanze ci indicano chiaramente la posizione di P rispetto al segmento, quando sia fissato il senso positivo (per es. *quello che va dall'origine al termine del segmento*, da A a B).

Ciò posto, si indichino col relativo segno le distanze del punto O dagli estremi del segmento MN, secondo che O si trovi interno a MN, o sul prolungamento di MN, o sul prolungamento di NM.

Si dica inoltre qual'è la posizione del punto C rispetto ad AB sapendo:

1° che $CB = -1$, $CA = -3$;

2° che la somma delle due distanze è *zero*;

3° che la somma delle due distanze è $CA = -4$ (*Qual'è in questo caso la lunghezza del segmento* AB?);

4° che il rapporto delle due distanze è $-\frac{3}{4}$, ovvero $\frac{2}{3}$, ec.

2. — Dato l'angolo positivo AOB, ogni semiretta OC del medesimo piano determina due angoli COA, COB, che si diranno *discordi* o *concordi* secondo che la OC è *interna* o *esterna* all'angolo AOB Nel primo caso $\widehat{COA}$ è negativo, e $\widehat{COB}$ positivo.

Ciò posto si dica:

1° in qual caso si avranno angoli ambedue positivi, o ambedue negativi?;

2° qual'è la somma e quale la differenza degli angoli determinati dalla bisettrice di AOB?;

3° può darsi che il rapporto degli angoli COA, COB sia 1?;

4° Questo rapporto quando sarà negativo e quando positivo?

3. — I punti di una retta parallela all'asse XX', e distante da esso di un segmento d, quante e quali *ordinate* possibili possono avere?

Tutte le *ascisse* dei punti di una retta sono eguali a (— 3). Qual'è la posizione della retta rispetto agli assi coordinati?

4. — Le diagonali di un quadrato, di lato $l = 12$, sono sovrapposte agli assi coordinati. Calcolare le coordinate dei quattro vertici. — E se il medesimo quadrato ha i lati paralleli e simmetrici rispetto agli assi, quali saranno le coordinate dei vertici?

5. — Le coordinate del punto A sono (— 20 e 21); trovare la lunghezza del *raggio vettore* OA.

Trovare la distanza di due punti, le cui coordinate sono (5 e — 2), (— 3 e 4). — *Generalizzare.*

6. — Servendovi delle tavole, trovate nel cerchio trigonometrico le coordinate degli estremi dei seguenti archi:

$$50^\circ \quad -100^\circ; \quad -150^\circ; \quad -400^\circ; \quad 500^\circ; \quad 1000^\circ.$$

7. — Si dica tra quali limiti può variare ciascuna delle seguenti espressioni:

$$1 + \cos\alpha; \quad 1 - \operatorname{sen}\alpha; \quad \operatorname{sen}\alpha + \cos\beta; \quad 1 + \cos^2\alpha;$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha; \quad \operatorname{sen}^2\alpha - 1; \quad \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\beta.$$

8. — Costruire e calcolare i minimi angoli positivi, dei quali si sa:

che il seno è: $\frac{3}{4}$; $-\frac{2}{3}$; $0{,}5$; $-\frac{2}{5}$;

che il coseno è: $\frac{5}{8}$; $-0{,}25$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{4}{5}$;

che la tangente è: 1; -2; 3; -4.

9. — Determinare gli angoli del primo giro, per i quali si ha:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cos^2\alpha = 0{,}64; \quad \operatorname{tg}^2\alpha = 1{,}69.$$

10. — In ciascuno dei quattro quadranti trovare due archi le cui tangenti abbiano per rapporto $\frac{2}{3}$. (*Costruzione geometrica* e determinazione numerica).

11. — Calcolare $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ sapendo che $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}6$ e che α è minore di un giro (*Discussione*).

12. — Risolvere le seguenti *equazioni trigonometriche*:

$$\cos x - \operatorname{sen} x = 0{,}56\,; \quad \operatorname{sen} x + \cos x = 1{,}3918\,;$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{sen} x + \frac{1}{5}\cos x = 0{,}3541\,.$$

13. — Essendo

$$\operatorname{sen}\alpha = a\,; \quad \cos\beta = b\,; \quad \operatorname{tg}\gamma = c\,,$$

trovare i valori delle rispettive funzioni trigonometriche, supponendo che i rispettivi argomenti α, β, γ si sostituiscano con i loro *opposti*, o *complementari*, o *supplementari*; ovvero che si aumentino o si diminuiscano di 90° o di 180°.

14. — Ridurre al 1° quadrante le funzioni:

sen 130°; sen 200°; sen 310°; sen 700°;

cos 115°; cos 250°; cos — 80°; cos 800°;

tg 1200°; tg (— 100°); tg 340°; tg (— 315°).

15. — Tenendo conto delle relazioni tra le funzioni trigonometriche degli angoli complementari, e in particolare della formula $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}(90° - \alpha)$ ridurre al 1° *semiquadrante* le funzioni:

sen 128°; sen 250°; sen — 65°;

cos 112°; cos 200°; cos 420°;

tg 475°; tg — 110°; tg 1924°.

16. — Dare le formule generali degli angoli α, per i quali si ha:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}\,; \quad \cos\alpha = \frac{1}{3}\,; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}\,;$$

$$\operatorname{sen}\alpha = -0{,}75\,; \quad \cos\alpha = \frac{11}{15}\,; \quad \operatorname{tg}\alpha = -2{,}7.$$

17. — Si estendano le formule di *addizione* e di *moltiplicazione* al caso che gli angoli siano *tre*:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{sen}[(\alpha+\beta)+\gamma]=\ldots$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos[(\alpha+\beta)+\gamma]=\ldots$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha=\operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)=\ldots$$

18. — Determinare gli angoli α, per i quali si ha:

$$\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=n.$$

19. — Sapendo che

$$\operatorname{tg} 60^\circ=\sqrt{3}\,; \qquad \operatorname{tg} 45^\circ=1\,,$$

si trovi il valore di $\operatorname{tg} 15^\circ$, e si dimostri che queste tre tangenti sono in progressione aritmetica.

20. — Si dimostri che

$$\operatorname{sen}(\alpha+45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha);$$

$$\cos(\alpha+45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha).$$

Applicare queste formule per risolvere nel modo più semplice le equazioni trigonometriche:

$$\cos x-\operatorname{sen} x=0{,}56: \qquad \operatorname{sen} x+\cos x=1{,}3916,$$

già proposte nel n. 12 di questi *esercizi*.

21. — Se α e β sono angoli acuti, dimostrare che si ha:

$$\operatorname{sen}\alpha\,.\,\operatorname{sen}\beta \gtreqless \cos\alpha\,.\,\cos\beta,$$

secondo che

$$(\alpha+\beta) \gtreqless 90^\circ.$$

22. — Dimostrare che

$$\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha=\cos 2\alpha\,;$$

$$\cos^4\alpha+\operatorname{sen}^4\alpha=1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2\alpha\,.$$

23. — Dimostrare le due relazioni:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\,.\,\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta);$$

$$\cos(\alpha+\beta)\,.\,\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta)(\cos\alpha-\operatorname{sen}\beta).$$

24. — Dimostrare che le tangenti degli angoli di un triangolo sono tre numeri tali che la loro somma è eguale al loro prodotto. E, inversamente, numeri siffatti (due almeno siano positivi) possono rappresentare le tangenti degli angoli di un triangolo. (*Essendo* α, β, γ *gli angoli di un triangolo, si ha*:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{tg}\gamma=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\ ec.\ \ldots\Big).$$

Costruire un triangolo, i cui angoli abbiano per tangenti i numeri 1, 2, 3.

25. — In un triangolo si dirà *proiezione* di un lato sopra un altro il prodotto del primo lato per il coseno dell'angolo che esso forma con l'altro lato. — La proiezione si considera *positiva* o *negativa* secondo che sia positivo o negativo il coseno dell'angolo.

Ciò posto, per il teorema dei seni si ha:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}};$$

ossia, moltiplicando per $\cos\widehat{B}$ i termini della 1ª frazione, e per $\cos\widehat{A}$ i termini della 2ª:

$$\frac{a\cos\widehat{B}}{\operatorname{sen}\widehat{A}\cos B}=\frac{b\cos\widehat{A}}{\operatorname{sen}\widehat{B}\cos A}=\frac{c}{\operatorname{sen}C},$$

od anche, componendo:

$$\frac{a\cos\widehat{B}+b\cos\widehat{A}}{\operatorname{sen}\widehat{A}\cos B+\operatorname{sen}\widehat{B}\cos\widehat{A}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}=\frac{a\cos\widehat{B}+b\cos\widehat{A}}{\operatorname{sen}(\widehat{A}+\widehat{B})}.$$

E poichè i denominatori delle due ultime frazioni sono eguali, si avrà:

$$c=a\cos\widehat{B}+b\cos\widehat{A},$$

che è il **teorema delle proiezioni**; cioè:

Ogni lato di un triangolo è eguale alla somma delle proiezioni su di esso degli altri due lati.

Dimostrare *direttamente* il teorema delle proiezioni, conducendo da un vertice la normale al lato opposto.

26. — *Altra notevole applicazione del teorema dei seni.* — Nel triangolo ABC (fig. 21) sia AD una *corda* uscente dal vertice A, e che incontri il lato opposto in D. Indichiamo con a' e b' le distanze di D dagli estremi del lato BC, e con α' e α'' gli angoli (rispettivamente opposti DAB, DAC) che la corda AD forma con i lati AB, AC. Pel teorema dei seni si ha:

$$a' = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{D}} \times \operatorname{sen} \alpha' ; \qquad a'' = \frac{b}{\operatorname{sen} D} \times \operatorname{sen} \alpha'' ,$$

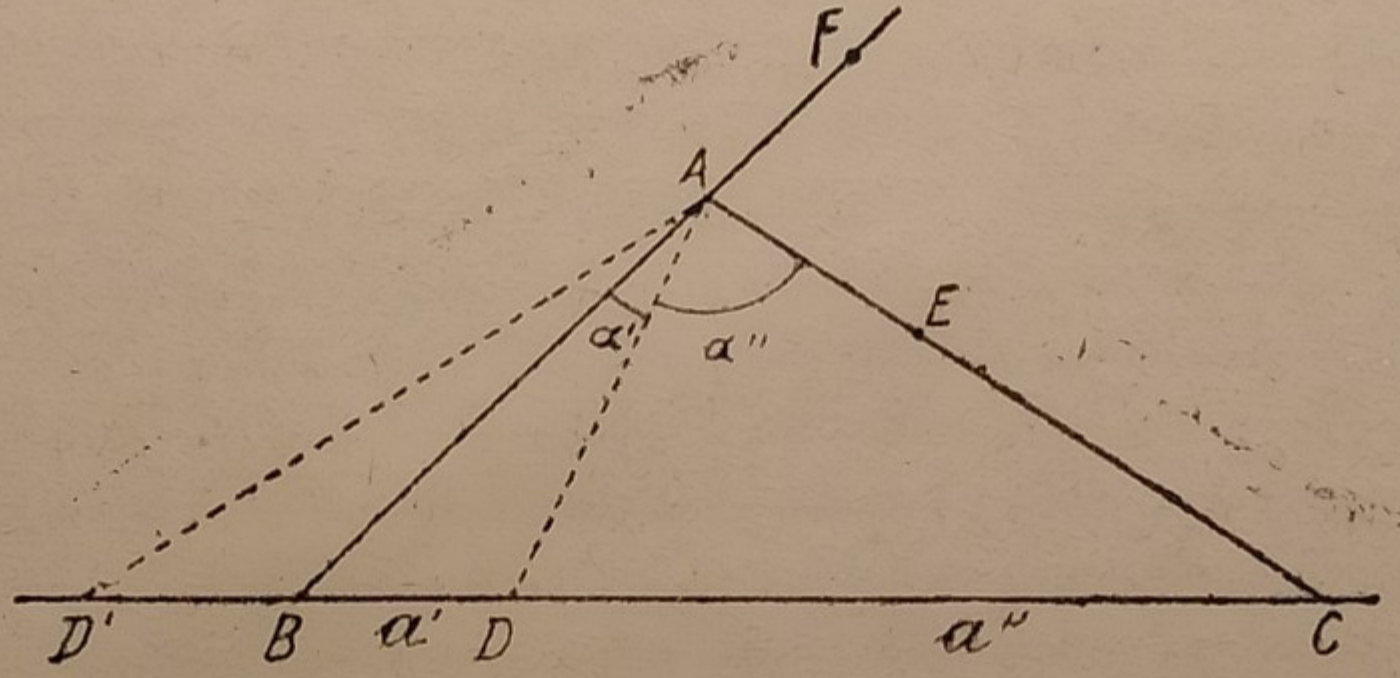


Fig. 21.

e quindi:

$$(1) \qquad \frac{a'}{a''} = \frac{c}{b} \times \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha''} .$$

Si noti che la stessa formula si otterrebbe, se il punto D cadesse sul prolungamento di BC, per es. su D'. Si distingue l'un caso dall'altro per il fatto che nella (1) i rapporti

$$\frac{a'}{a''} \qquad \text{e} \qquad \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha''}$$

sono negativi (v. nn. 1 e 2 di questi esercizi): e per il caso della corda AD' i medesimi rapporti sarebbero positivi.

Altre due formule simili alla (1) si avranno rispetto ai punti E ed F dei lati CB, AB, supposti orientati nello stesso senso del lato BC, cioè:

$$(2) \qquad \frac{b'}{b''} = \frac{a}{c} \times \frac{\operatorname{sen} \beta'}{\operatorname{sen} \beta''} ; \qquad \frac{c'}{c''} = \frac{b}{a} \times \frac{\operatorname{sen} \gamma'}{\operatorname{sen} \gamma''}$$

avendo posto:

$$b' = EC\,;\quad b'' = EA\,;\quad c' = FA\,;\quad c'' = FB\,;$$

$$\operatorname{sen}\beta' = \widehat{EBC}\,;\quad \operatorname{sen}\beta'' = \widehat{EBA}\,;\quad \operatorname{sen}\gamma' = \widehat{FCA}\,;\quad \operatorname{sen}\gamma'' = \widehat{FCB}.$$

Moltiplicando le (1) e (2) membro a membro, si ha:

$$(3)\qquad \frac{a'\,.\,b'\,.\,c'}{a''\,.\,b''\,.\,c''} = \frac{\operatorname{sen}\alpha'\,.\,\operatorname{sen}\beta'\,.\,\operatorname{sen}\gamma'}{\operatorname{sen}\alpha''\,.\,\operatorname{sen}\beta''\,.\,\operatorname{sen}\gamma''}\,,$$

cioè:

" Diviso ciascun lato di un triangolo con un punto (interno od esterno), il prodotto di tre segmenti non consecutivi sta al prodotto degli altri tre, come il prodotto dei seni degli angoli opposti ai primi segmenti sta al prodotto dei seni degli altri tre angoli „.

I due rapporti della (3) sono *positivi*, se tra i punti di divisione dei lati ve ne sono due interni o nessuno; sono *negativi* se tra i punti di divisione ve ne sono due esterni o nessuno.

Se le tre corde, che uniscono i punti di divisione dei lati con i vertici opposti, passano per uno stesso punto, si dimostra che i due rapporti della (3) sono eguali a -1 (1); e invèrsamente: se l'uno o l'altro dei rapporti della (3) risulti eguale a -1, le tre corde uscenti dai vertici devono passare per lo stesso punto (2) (*teorema di Ceva*).

Se i tre punti di divisione dei lati giacciono sopra una retta si dimostra che i due rapporti della (3) sono eguali a 1; e inversamente: se l'uno o l'altro dei rapporti della (3) risulti eguale a 1, i tre punti di divisione dei lati devono appartenere a una medesima retta (*teorema di Menelao*).

Nei casi che si abbia

$$(4)\qquad \frac{a'\,.\,b'\,.\,c'}{a''\,.\,b''\,.\,c''} = \frac{\operatorname{sen}\alpha'\,.\,\operatorname{sen}\beta'\,.\,\operatorname{sen}\gamma'}{\operatorname{sen}\alpha''\,.\,\operatorname{sen}\beta''\,.\,\operatorname{sen}\gamma''} = \pm 1\,,$$

i punti di divisione dei lati del triangolo si possono sostituire con i loro simmetrici rispetto ai punti medi dei lati (punti *isotomici*); ovvero le corde uscenti dai vertici si possono sostituire con le loro

---

(1) L'alunno è invitato a fare questa dimostrazione, per la quale seguita ad applicarsi il teorema dei seni.

(2) Si dimostra subito per assurdo.

simmetriche rispetto alle bisettrici degli angoli (linee *isogonali*); infatti nella (4) verrebbero soltanto invertiti i termini della prima frazione, ovvero quelli della seconda. Ne segue che, in generale, per ogni proprietà data da una delle (4) ve ne sono altre due; quella relativa ai punti isotomici e quella relativa alle linee isogonali.

Ciò posto si dimostri che in un triangolo:

1° le bisettrici interne si incontrano in un punto;

2° le bisettrici esterne incontrano i lati in tre punti allineati;

3° le mediane e le *simediane* (simmetriche delle mediane rispetto alle bisettrici) si incontrano in un punto le une (*baricentro*), e in un punto (*punto di Lemoine*) le altre;

4° le altezze, le loro isotomiche e le loro isogonali si incontrano rispettivamente in tre punti, detti *ortocentro, isotomico* dell'ortocentro e *isogonale* dell'ortocentro;

5° si incontrano in un punto le corde che passano per i punti di tangenza del cerchio iscritto, o per i punti di tangenza di un cerchio ex-inscritto;

6° si incontrano in un punto le *bisettrici del perimetro*;

7° sono allineati i punti di incontro dei lati con due bisettrici interne e con la bisettrice esterna relativa al terzo angolo;

8° sono allineati i punti di incontro dei lati con le tangenti al cerchio circoscritto nei vertici opposti.

27. — Risolvere ognuno dei triangoli, essendo dati:

$a = 215$; $\widehat{B} = 48°\,15'$; $\widehat{C} = 86°\,10'$;

$a = 308$; $\widehat{A} = 102°$; $\widehat{C} = 48°\,40'$;

$a = 27{,}75$; $\widehat{B} = 96°\,30'$; $\widehat{A} = 39°\,20'$;

$a = 1860$; $b = 1924$; $c = 2000$;

$a = 346$; $b = 330$; $c = 104$ (1);

$a = 13{,}25$; $b = 11{,}10$: $c = 6{,}75$.

28. — Risolvere ognuno dei triangoli, dati:

---

(1) Si calcoli per primo l'angolo A, mediante la formula del coseno.

$a = 58$; $b = 72$; $\widehat{A} = 31° 40'$;

$a = 58$; $b = 72$; $\widehat{A} = 55° 20'$;

$a = b = 784$; $\widehat{A} = 51° 15$;

$a = 213$; $b = 426$; $\widehat{A} = 30°$.

29. — Risolvere ognuno dei triangoli, dati:

$a = 582$; $b = 430$; $\widehat{A} = 82° 25'$;

$a = 829$; $b = 603$; $\widehat{A} = 122°$;

$a = 71{,}30$; $b = 86°{,}20$; $\widehat{C} = 93° 10'$;

$b = 317$; $c = 401$; $\widehat{A} = 78° 40'$;

$c = 112$; $a = 189$; $\widehat{B} = 65° 35'$.

30. — Dire quali condizioni devono verificarsi perchè, noti a, b, $\widehat{A}$, si abbiano *due* soluzioni. — In questo caso dimostrare che i raggi dei cerchi circoscritti ai due triangoli sono eguali, e che la distanza dei centri è eguale a $\sqrt{4R^2 - b^2}$.

31. — La risoluzione di un triangolo può eseguirsi, anche se i dati non siano i *soli elementi* del triangolo.

Es. — Risolvere il triangolo, dati:

$\widehat{A} = 50°$; $\widehat{B} = 60°$; e il perimetro $(2p = 365)$.

(*Dal teorema dei seni, sommando antecedenti e conseguenti, si ha:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = \frac{2p}{\operatorname{sen}\widehat{A} + \operatorname{sen}\widehat{B} + \operatorname{sen}\widehat{C}}$$

quindi.....).

32. — Risolvere il triangolo, conoscendo:

$a = 340$; $(b + c) = 500$; $\widehat{C} = 39° 10'$.

(*Si risolva il triangolo di lati* a, (b + c) *e di angolo compreso* $\widehat{C}$ *in questo triangolo l'angolo opposto al lato* c *sarà la metà dell'angolo* $\widehat{A}$ *che si cerca*; ec.....).

33. — Risolvere il triangolo data l'area S, l'angolo $\widehat{A}$, e la somma $(b + c)$.

(*Essendo* $S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \widehat{A}$, *se ne trae il prodotto* (bc), *e così per mezzo della somma e del prodotto si trovano* b *e* c, ...).

Applicazione al caso:

$$(b + c) = 158 ; \qquad \widehat{A} = 42^\circ 10' ; \qquad S = 2004.$$

34. — Risolvere il triangolo, dati due angoli e l'area:

$$\widehat{A} = 59^\circ 35' ; \qquad \widehat{B} = 76^\circ 20' ; \qquad S = 420.$$

35. — Essendo p il semiperimetro di un triangolo, r il raggio del cerchio inscritto, S l'area, si ha

$$S = pr.$$

Ricavare r nel caso in cui siano noti i lati a, b, c del triangolo. — Noto r per mezzo dei lati, trovare gli angoli del triangolo.

36. — Area del parallelogrammo dati due lati e l'angolo compreso.

— Area del quadrilatero date le diagonali e l'angolo da esse formato.

— Formule generali per l'area dei poligoni regolari di n lati, inscritti e circoscritti a un cerchio di raggio R. Applicazione al caso di $n = 3, 4, 6, 8$.

37. — Formula generale per l'area del *segmento circolare* di data ampiezza α (non superiore a 180°).

Applicazione al caso che sia:

$$R = 52 ; \qquad \alpha = 125^\circ 35'.$$

38. — La risoluzione dei triangoli si applica nella pratica per le così dette *operazioni sul terreno* (*topografiche*). Si tratta per lo più di misurare con particolari istrumenti delle distanze e degli angoli, e di calcolare poi con questi dati altre distanze e altri angoli.

Così, per es., dovendosi *ridurre all'orizzonte* una lunghezza l misurata lungo un piano inclinato, si dovrà misurare l'angolo d'inclinazione del piano, e poi calcolare la proiezione di l sul piano orizzontale.

Ciò posto, si risolvano i problemi seguenti, assegnando i dati numerici corrispondenti agli elementi che devono ritenersi noti:

1°. Trovare la distanza tra un punto A e un altro punto inac-

cessibile B (*Si scelga sul terreno una base* $AC = ...$ *fuori della direzione* AB; *si misurino gli angoli* $BAC = ...$, $BCA = ...$, *ec.*).

2°. Trovare la distanza di due punti inaccessibili A e B (*Si scelga sul terreno una base* CD; *si considerino i triangoli* ACD, BCD, ...).

3°. Trovare l'altezza di una torre, osservata nel piano orizzontale che passa per la sua base (*Si considerino i due casi, in cui la base della torre sia accessibile o no*).

INDICE

PARTE PRIMA

Funzioni trigonometriche di angoli acuti. Risoluzione dei triangoli rettangoli.

Funzioni trigonometriche di angoli acuti . . . . . *Pag.* 3

1. Angoli ed archi misurati in radianti . . . . . „ 3
2. Seno, coseno e tangente d'un angolo acuto . . . . „ 6
3. Funzioni trigonometriche di 45°, 30°, 60° e 18° . . . „ 9
4. Relazioni fondamentali tra le funzioni trigonometriche di uno stesso angolo acuto . . . . . „ 12
5. Funzioni trigonometriche di angoli complementari . „ 16
6. Relazioni tra lati e angoli in un triangolo rettangolo . „ 18
7. Lato e apotema di un poligono regolare in funzione del raggio . . . . . „ 19
8. Formole per l'addizione degli angoli . . . . . „ 21
9. Formole per la sottrazione degli angoli . . . . . „ 23
10. Formole per la duplicazione degli angoli . . . . „ 24
11. Formole per la bisezione degli angoli . . . . . „ 26
12. Tavole trigonometriche e loro uso . . . . . „ 27
13. Risoluzione dei triangoli rettangoli . . . . . „ 41

Esercizi . . . . . „ 49

PARTE SECONDA

Funzioni trigonometriche di angoli quali si vogliano. Risoluzione dei triangoli in genere.

Segmenti e angoli relativi. - Coordinate dei punti del piano *Pag.* 57

Le funzioni trigonometriche di angoli qualunque . . „ 62

1. Seno di un angolo o di un arco, e sue variazioni . . „ 62
2. Coseno di un angolo o di un arco e sue variazioni . „ 64

3. Tangente di un angolo e di un arco qualunque e sue variazioni . . . . . *Pag.* 65
4. Segni delle funzioni trigonometriche secondo la regione angolare in cui termina l'argomento . . . . . „ 67
5. Valori delle funzioni trigonometriche degli angoli 0°, 90°, 180°, 270° . . . . . „ 68
6. Relazioni tra le funzioni trigonometriche di uno stesso angolo . . . . . „ 69

Funzioni trigonometriche di angoli aventi tra loro una determinata relazione . . . . . „ 69

1. Angoli associati e loro funzioni trigonometriche . . „ 69
2. Periodicità delle funzioni trigonometriche . . . „ 70
3. Funzioni trigonometriche di angoli opposti . . . „ 71
4. Funzioni trigonometriche di angoli complementari . . „ 72
5. Funzioni trigonometriche di angoli supplementari . . „ 73
6. Funzioni trigonometriche di angoli che differiscono di 180° „ 74
7. Funzioni trigonometriche di angoli che differiscono di 90° „ 75
8. Funzioni trigonometriche di angoli la cui somma è 360° . „ 76

Determinazione delle funzioni trigonometriche di un angolo e degli angoli di data funzione trigonometrica . „ 77

1. Riduzione degli angoli al primo quadrante . . . „ 77
2. Espressioni degli angoli che hanno una data funzione trigonometrica . . . . . „ 78

Generalizzazione delle formule di addizione e sottrazione, e conseguenze . . . . . „ 80

1. Formule di addizione e sottrazione per angoli qualunque „ 80
2. Formule di duplicazione e di bisezione . . . . . „ 82
3. Di alcune formule di trasformazione . . . . . „ 83

Risoluzione di triangoli qualunque . . . . . „ 85

1. Relazioni tra gli elementi di un triangolo . . . „ 85
2. Formule risolutive per triangoli qualunque e applicazioni „ 90
3. Area del triangolo . . . . . „ 99

Esercizi . . . . . „ 104

g. 65
» 67
» 68
» 69
69
69
70
71
72
73
74
75
76
77
77
78
80
80
82
83
5
5
0
9
4

Torino-Milano-Firenze — G. B. PARAVIA & C. — Roma-Napoli-Palermo

PROF. CORRADO CIAMBERLINI

Nozioni di algebra per i Corsi magistrali inferiori . . . . L. 7 —

Aritmetica razionale per il Corso sup. dell'Ist. magistrale . . » 8,50

Elementi di geometria per i Regi Istituti industriali di 3° grado

Parte I — Planimetria (con figure) . . . . . » 9 —

Parte II — Stereometria (id.) . . . . . » 7,50

Elementi di aritmetica pratica per le Scuole operaie e commerciali. 2ª edizione arricchita di esercizi e problemi . . . . » 5,50

Cenni sulla misurazione delle superfici e dei solidi più comuni. Appendice agli elementi di aritmetica pratica per Scuole operaie e commerciali, specialmente adottati nelle Scuole serali superiori di Milano . . . . . » 2,50

Elementi di aritmetica e geometria per le Scuole popolari operaie 1° grado

Parte I — Per la 1ª classe . . . . . » 7 —

Parte II — Per la 2ª classe . . . . . » 6,50

Parte III — Per la 3ª classe . . . . . » 5 —

Aritmetica pratica per le Scuole secondarie di avviamento al lavoro e per i Corsi inferiori degli Istituti tecnici e magistrali . . . » 12 —

Elementi di geometria per le Scuole secondarie d'avv. al lavoro » 9,50

Norme ed esercizi sull'uso delle parentesi e sul calcolo delle espressioni aritmetiche e letterali, ad uso dei candidati agli esami di licenza complementare e all'ammissione ai Corsi superiori dell'Istituto tecnico e del Ginnasio . . . . » 2,50

Saggi di didattica matematica; raccolta di scritti vari . . » 15 —

PROF. C. CIAMBERLINI e S. BANDINI

Algebra per i Corsi inferiori degli Istituti tecnici . . . . . L. 10 —

Elementi di algebra per i Corsi superiori degli Istituti tecnici . » 18 —

PROF. C. CIAMBERLINI e A. SCALA

Elementi di geometria per il Corso superiore degli Istituti tecnici L. 15 —

Elementi di geometria per il Corso superiore degli Istituti magistrali » 15 —

Geometria per i Corsi inferiori degli Istituti tecnici e magistrali . . » 9,50

PROF. C. CIAMBERLINI e B. BETTINI

Elementi di trigonometria ad uso dei Licei classici . . . L. 8,50

Vade-mecum per la preparazione alla matematica negli esami di maturità per il Liceo classico. Esercizi e domande su tutte le parti del programma . . . . . » 12 —

Prezzo: L. 9 — (in Torino) **L. 8,50**